

GROUPE D'ASTROPHYSIQUE

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

spécialité : PHYSIQUE DES GAZ ET DES PLASMAS

par

Robert ROUBAUD

GROUPE D'ASTROPHYSIQUE
Université Scientifique
et Médicale de Grenoble
ERA N° 961 du CNRS
CERMO - B.P. 68
38402 ST MARTIN D'HÈRES CEDEX

CAVITATION ET PHENOMENES DISSIPATIFS

EN

TURBULENCE DE LANGMUIR FORTE

Soutenue le 18 mai 1984 devant la Commission d'Examen

MM.

J.-M. DOLIQUE

Président

A. MANGENEY

A. OMONT

G. PELLETIER

Examineurs

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur le Professeur J.M. Dolique de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également Monsieur le Professeur A. Omont pour la possibilité qu'il m'a offerte de faire cette thèse dans le Groupe d'Astrophysique ainsi que d'avoir accepté d'être membre du jury.

Je prie Monsieur A. Mangeney, astronome à l'Observatoire de Meudon, d'accepter mes remerciements pour avoir bien voulu participer à ce jury.

J'exprime ma profonde gratitude à Guy Pelletier qui m'a proposé un sujet de thèse original, m'a conseillé et fait bénéficier de son expérience ; je l'en remercie vivement.

Que Pierre Valiron trouve ici toute ma reconnaissance pour ses conseils en matière d'informatique et de calculs numériques.

Je voudrais aussi remercier tout spécialement Mesdames Christin et di Giacomo pour leur gentillesse et le soin avec lequel elles se sont chargées de la frappe de ce mémoire.

E R R A T A

Thèse Roubaud

- Page 10, ligne 12 lire ($\gamma_e = 1$)
- Page 29, ligne 19 lire (cf.II.B28)
- Page 32, formule II.D24 lire : $\dots < 4|H|$ et $H < 0$
- Page 34, ligne 3 lire (II.D18,19)
- Page 36, ligne 20 lire (II.E13) et à l'aide de (II.E12)
- Page 37, ligne 12 lire $-\dot{\xi}/\xi$

R E S U M E

La turbulence de Langmuir Forte dans les plasmas a de nombreuses conséquences tant dans les applications à la fusion rapide qu'à l'astrophysique.

La déduction des équations couplant le spectre turbulent de Langmuir des cavités en effondrement et la fonction de distribution des particules se trouve exposée en détail dans ce mémoire.

Le traitement numérique de ces équations confirme le développement d'une queue de particules suprathermiques prédite théoriquement.

Par ailleurs, l'importance du rôle du rayonnement d'ondes sonores est mise en évidence. Il est montré que ce rayonnement se manifeste par une réaction sur la source de la turbulence, lorsque la queue d'électrons chauds s'est étendue, par l'intermédiaire du phénomène de conversion aléatoire.

La prise en compte de ce dernier phénomène conduit à une sorte d'intermittence, cette tendance a été confirmée numériquement d'abord par une modélisation à 3 et 4 degrés de liberté puis sur l'ensemble des équations spectrales.

M O T S C L E S

Turbulence de Langmuir, queue de particules, ondes sonores, intermittence.

-000-

GROUPE D'ASTROPHYSIQUE

Université Scientifique
et Médicale de Grenoble

• ERA N° 961 du CNRS

CERMO - B.P. 68

38402 ST MARTIN D'HÈRES CEDEX

S O M M A I R E

=====

CHAPITRE I	INTRODUCTION	
	A - La turbulence plasma	1
	B - La turbulence de Langmuir	1
	C - Amorçage de la turbulence forte	3
	REFERENCES	8
CHAPITRE II	EQUATIONS DE ZAKHAROV - AUTOMODULATION	
	A - Introduction	9
	B - Effet de Condensation	12
	C - Description lagrangienne	18
	D - Equation de dispersion de l'automodulation	27
	E - Solutions auto-similaires supersoniques	34
	REFERENCES	39
CHAPITRE III	THEORIE STATISTIQUE	
	A - Introduction	40
	B - Zone inertielle	41
	C - Zone dissipative	43
	D - Equation pour la fonction de distribution $f(v)$ des particules	48
	E - Recherche de solutions quasi-stationnaires dissipatives	49
	F - Caractéristique de la queue de particules résonnantes	53
	REFERENCES	60

CHAPITRE IV	EMISSION D'ONDES SONORES	
	A - Introduction	61
	B - Puissance rayonnée par un caviton	62
	C - Equation spectrale des ondes sonores	63
	D - Equation spectrale de l'énergie associée aux raréfactions de densité	65
	E - Comparaison des densités d'énergie sonores associées aux flux d'ions et aux cavités	68
	F - Contribution de la turbulence forte de Langmuir à la résistivité anormale	70
	G - Turbulence forte et interaction Faisceau - Plasma	72
	H - Effet de Conversion	77
	REFERENCES	84
CHAPITRE V	MODELISATION NUMERIQUE	
	A - Introduction	85
	B - Expressions adimensionnées	86
	C - Choix de D (v_{\min})	87
	D - Choix du Maillage	88
	E - Reformulation des équations cinétiques	89
	F - Traitement numérique	90
	REFERENCES	98
CHAPITRE VI		
	A - Description spectrale	99
	B - Evolution des densités d'énergie	101
	C - Etude du système dynamique	104
	D - Modélisation à 4 degrés de Liberté	107
	E - Traitement numérique des spectres	108
	REFERENCES	114
CONCLUSION		115
APPENDICES	A	117
	B	119
	C	121
	D	123
	E	126
	F	129

CHAPITRE I

INTRODUCTION

A. LA TURBULENCE PLASMA

Si l'état turbulent est pour un plasma l'état le plus répandu, celui-ci est paradoxalement le plus méconnu tant expérimentalement que théoriquement.

Expérimentalement, due à la grande variété de modes pouvant coexister, il n'est pas facile d'isoler un type de turbulence particulier, de plus l'interprétation des résultats reste sujette à caution.

Sur le plan théorique, la modélisation est délicate principalement à cause du caractère non linéaire de la turbulence plasma. Il n'existe pas en cette matière d'outil mathématique bien établi conduisant à une description exacte des phénomènes.

Quoiqu'il en soit, des nécessités expérimentales (particulièrement en fusion contrôlée) motivent des recherches sur cet état complexe qu'est la turbulence plasma.

Parmi les divers types de turbulence pouvant exister dans un plasma (M.H.D., acoustique, ...) la turbulence de Langmuir reste actuellement l'une des plus étudiées.

B. LA TURBULENCE DE LANGMUIR

A la suite d'instabilités (il en sera question par la suite), peuvent prendre naissance dans un plasma des oscillations irrégulières électrostatiques électroniques (1). Celles-ci croissant exponentiellement avec le temps atteindront, en l'absence de forte dissipation, une amplitude telle que leur intensité sera notable face à la densité d'énergie thermique du plasma, de sorte que les interactions de ces ondes entre elles et avec les particules devront être prises en compte.

Il est clair que macroscopiquement l'évolution du plasma va s'en trouver altéré. Celui-ci va être le siège de phénomènes désordonnés et l'on peut parler alors d'un régime turbulent. Tout comme en hydrodynamique la connaissance du spectre de la densité d'énergie turbulente constituera une information déterminante dans l'étude de celle-ci. En effet, le spectre est une grandeur expérimentalement mesurable bien que parfois seules des simulations numériques soient possibles (ceci est particulièrement vrai pour la turbulence de Langmuir). Celui-ci connu, il est possible, par comparaison avec la théorie, de déterminer les interactions microscopiques responsables, pour une gamme d'onde donnée, de l'établissement d'une distribution particulière de l'énergie suivant ces nombres d'onde.

Une telle démarche permet de confirmer, au moins à une dimension, la théorie quasi-linéaire (2,3) (qui ne considère que l'interaction linéaire résonnante onde-particule).

Si l'on considère des processus d'ordres supérieurs (4) (interactions à trois ondes ou entre une particule et deux ondes) la théorie de la turbulence de Langmuir dite, dans ce cas, faible conduit à un transfert de l'énergie turbulente aux petits nombres d'onde, région où la dissipation linéaire par les particules résonnantes du plasma est absente. Cette théorie n'est valable que pour des niveaux de bruits faibles (cf chapitre II) et puisque d'une manière générale le processus amorçant l'instabilité est continu, il en découle que cette dernière théorie devient rapidement, dans des situations réelles, inapplicable ; il se crée une condition favorable à l'apparition de la turbulence forte.

L'énergie turbulente se concentrant aux petits nombres d'onde, le condensat langmuirien devient lui-même instable (5) et il se développe une nouvelle instabilité dite d'auto-modulation (6) conduisant à un phénomène de cavitation du plasma (7) (voir Chapitre II).

On convient de nommer régime de turbulence forte cette étape, les équations de Zakharov (7) le modèlent et ôtent le paradoxe de l'existence d'un amas langmuirien aux grandes échelles. Un traitement statistique permet alors de décrire macroscopiquement le plasma (voir Chapitre III), de plus, parallèlement, se déclenche une turbulence basse fréquence (ionique) ainsi que les phénomènes de conversion et de résistivité anormale (voir Chapitres III et IV).

Comme nous l'avons cité en début de paragraphe, la turbulence ne peut prendre naissance qu'à la suite de l'excitation d'une instabilité ; examinons les méthodes permettant d'amorcer cette dernière, nous donnerons aussi quelques exemples concrets où son existence semble confirmée.

C. AMORCAGE DE LA TURBULENCE FORTE

Nous pouvons distinguer deux cas :

- Interaction d'un faisceau de particules, relativiste ou classique, avec le plasma.
- Propagation d'une onde électromagnétique intense dans le plasma.

a - Interaction faisceau-plasma

Cette interaction est l'une des plus communes en physique des plasmas (voir figure I.1).

Peu importe que le faisceau soit froid (8) (voir Chapitre IV) ou tiède (8), une turbulence de Langmuir forte pourra en résulter, avec à la base des mécanismes physiques différents.

Dans le cas d'un faisceau de densité n_F , de dispersion thermique Δv_F et de vitesse v_F satisfaisant les conditions (voir figure I.2) :

$$\left(\frac{\Delta v_F}{v_F} \right)^3 \gg \frac{n_F}{n_0} \quad ; \quad \frac{n_F}{n_0} \ll 1$$

(hypothèses d'un faisceau tiède) nous pouvons adopter une description quasi-linéaire. Autour du nombre d'onde k_F satisfaisant la condition de résonance Cerenkov :

$$\omega_{pe} = \vec{k}_F \cdot \vec{v}_F$$

vont croître, proportionnellement à $\exp(\gamma_F t)$, des ondes de Langmuir (région à pente positive de la bosse). Le taux de croissance γ_F de cette instabilité est donné, à des termes de l'unité près et dans le cas classique, par l'expression :

$$\gamma_F \simeq \frac{n_F}{n_0} \left(\frac{v_F}{\Delta v_F} \right)^2 \omega_{pe}$$

En premier lieu ces ondes de Langmuir vont être, en suivant le schéma de la turbulence faible (voir chapitre II), refoulées vers les petits nombres d'onde $k \rightarrow 0$. Le condensat langmuirien se forme. Pour des densités d'énergie $W \gg (k\lambda_D)^2 n_0 k_B T$, où k est un nombre d'onde caractéristique du condensat, celui-ci est instable face aux modulations de densité, la turbulence forte est créée et l'énergie s'écoule vers les grands nombres d'ondes $k \rightarrow k_D$. Il en découle que le niveau des bruits en résonance avec le faisceau est sensiblement diminué. Si ce processus prend place en un temps inférieur au temps de création des ondes de

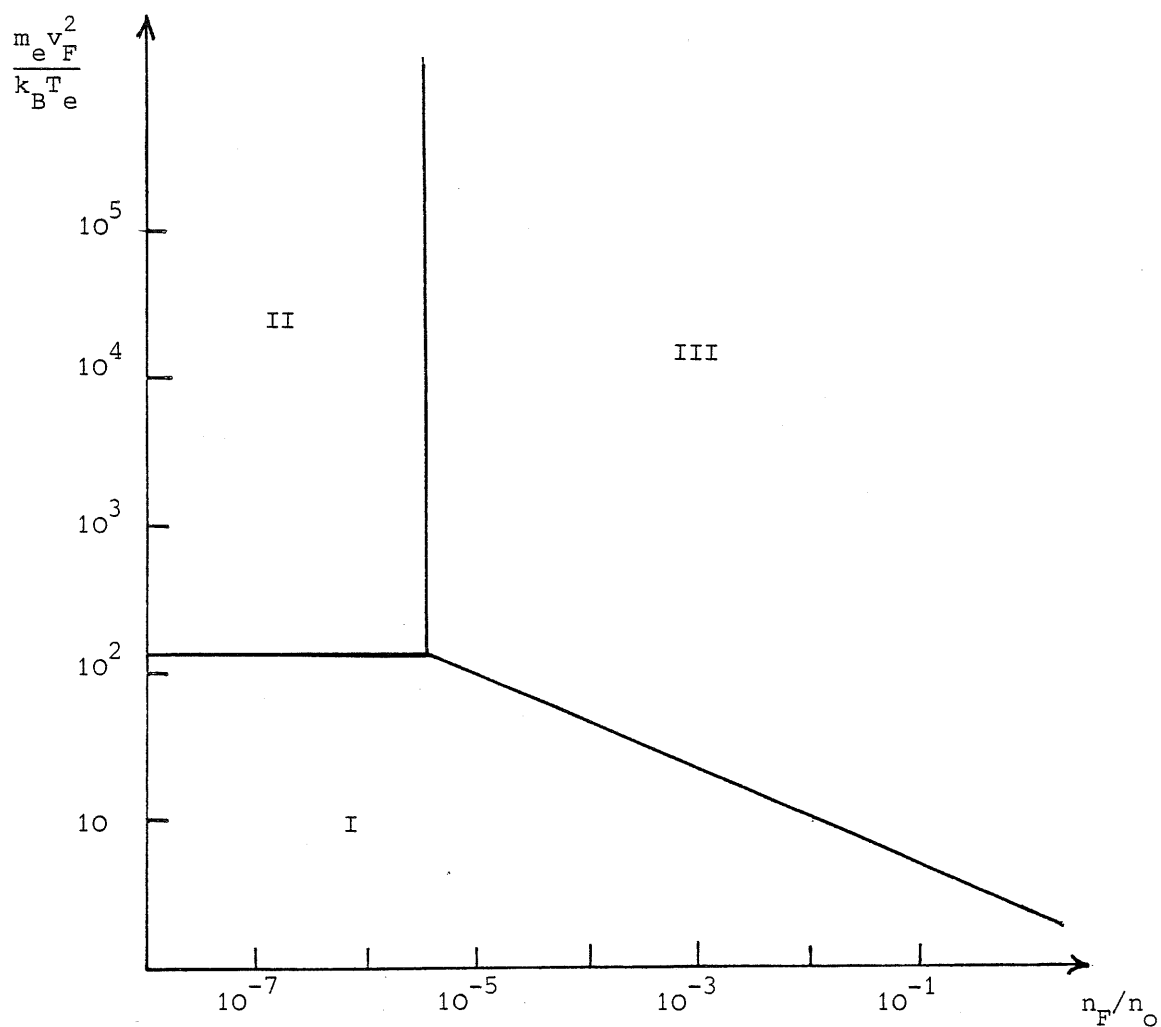


Figure I.1 - Régions d'applicabilité des diverses théories de relaxation de faisceau (6).

I. Théorie quasi-linéaire

II. Théorie de la turbulence faible

III. Théorie de la turbulence forte.

Langmuir, temps de l'ordre de l'inverse du taux de croissance γ_F , l'intensité des ondes résonnantes reste faible et le faisceau peut se propager sur de plus longues distances.

Notons qu'une telle propagation s'observe dans bien des phénomènes naturels et que l'hypothèse de l'existence d'un régime de turbulence forte en fournit une explication plausible.

Remarquons en particulier :

- ★ Les éruptions solaires du type III (9).

- ★ L'interaction vent solaire - faisceau d'électrons dans le voisinage de Jupiter (10). Dans ce cas, et selon les auteurs, le phénomène de cavitation a pu être détecté.

- ★ Les courants d'électrons de hautes énergies pénètrent dans l'ionosphère dans les régions aurorales (11).

Dans ces exemples, les ondes de Langmuir ont été directement mesurées.

Par ailleurs, son existence est soupçonnée dans les pulsars et les radiosources extragalactiques où les faisceaux relativistes émis par les régions centrales sont supposés être constitués d'électrons et de positrons (12).

De plus on peut supposer qu'au laboratoire la turbulence forte de Langmuir joue un rôle lors :

- ★ De l'utilisation des faisceaux, en tant que moyen de chauffage additionnel, pour atteindre la température d'ignition, dans les machines à fusion. La turbulence forte déclenchant une turbulence basse fréquence (voir chapitre IV) on peut espérer un chauffage turbulent par suite de l'apparition d'une résistivité anormale (13).

- ★ De l'utilisation de faisceaux d'électrons, ou d'ions, relativistes pour des applications à la fusion par confinement inertiel.

b - Interaction onde électromagnétique intense - plasma

Dans les expériences de fusion laser il est bien établi que parmi les nombreux mécanismes d'absorption de l'énergie (absorption collisionnelle, par diffusion, etc...) les mécanismes basés sur les instabilités de décomposition jouent un rôle important, voire dominant, dans certains cas (14).

Deux zones principales où ces mécanismes se déclenchent ont été mises en évidence (voir figure I.3).

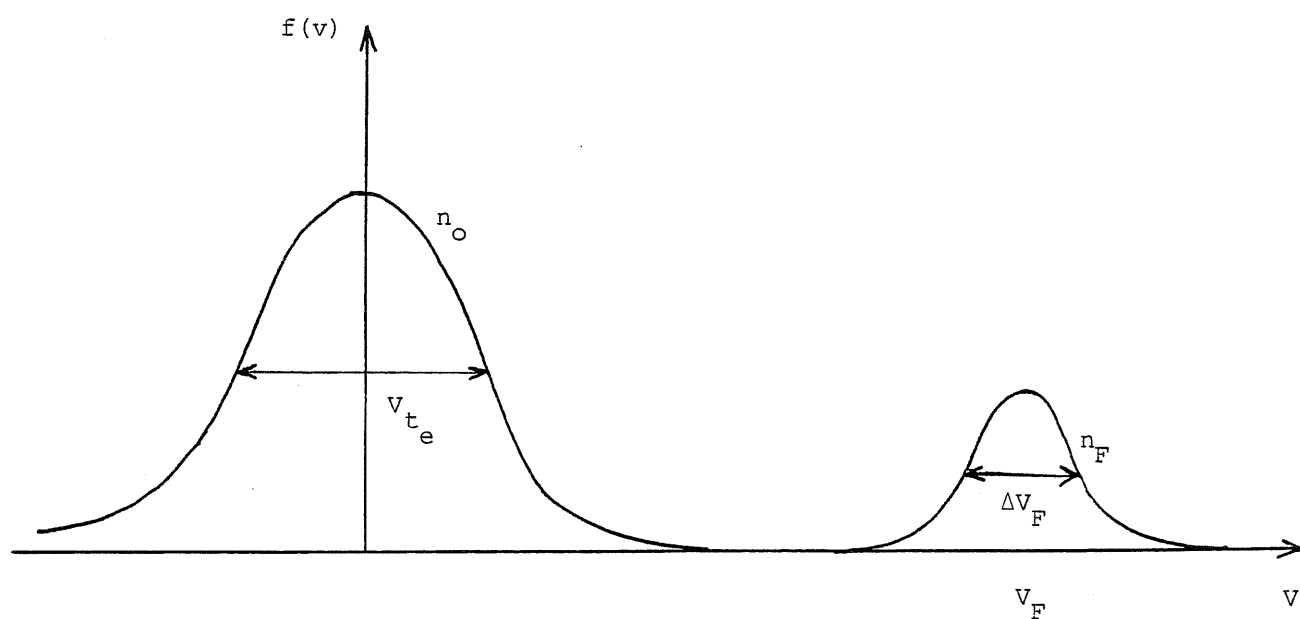


Figure I.2 - Fonction de distribution dans l'espace des vitesses du système plasma faisceau.

$$v_F = \omega_{pe} / k_F$$

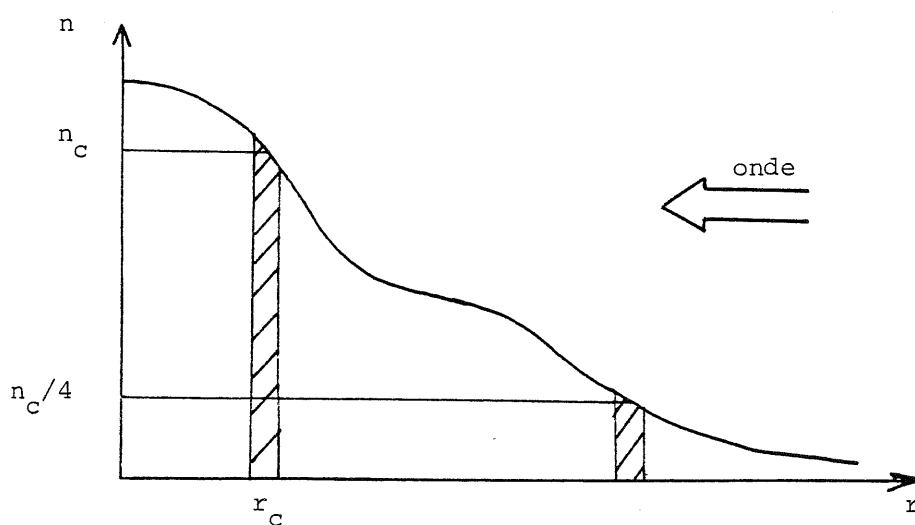


Figure I.3 - Profil de densité du plasma cible.

r_c : rayon critique de la cible.

$n = n_c$: $t \rightarrow \ell + s$

$n = n_c/4$: $t \rightarrow \ell + \ell'$

- L'une au voisinage d'une densité critique n_c de la cible, avec $n_c = \epsilon_0 m_e \omega^2 / e^2$ et où ω est la pulsation de l'onde du laser ($\omega \approx \omega_{pe}$). Dans ce cas l'onde électromagnétique se décompose en une onde de Langmuir et une onde sonore, il se crée une turbulence forte de Langmuir.

- L'autre autour de $n_c/4$, ici l'onde électromagnétique se décompose en 2 ondes de Langmuir et il s'en suit une turbulence forte, dans cette région l'absorption est plus faible que précédemment.

D'autre part, il a été démontré numériquement que l'instabilité d'auto-modulation pouvait être excitée lors d'expériences de propagation d'ondes électromagnétiques dans l'ionosphère (15).

En conclusion de ce paragraphe nous constatons que la turbulence forte de Langmuir se manifeste, et joue un rôle crucial, dans de nombreux phénomènes tant dans la nature que dans le laboratoire.

R E F E R E N C E S

- 1 - B. KADOMTSEV - Phénomènes collectifs dans les plasmas - Edition de Moscou (1979).
- 2 - C. ROBERTSON and K.W. GENTLE - Phys. of Fluids 14, 2780 (1971).
- 3 - MORSE and NIELSON - Phys. of Fluids 11, 1506 (1968).
- 4 - G. PELLETIER - Thèse d'Etat, Grenoble (1977).
- 5 - TSYTOVICH - Plasma Turbulence, Pergamon Press (1977).
- 6 - A.A. VEDENOV and I. RUDAKOV - Sov. Phys. Dokl. 9, 1073 (1965).
- 7 - V.E. ZAKHAROV - Sov. Phys. JETP 35, 908 (1972).
- 8 - T.M. O'NEIL - Ecole d'Eté du CEA (Cadarache) (1972).
- 9 - S. BARDWELL and M.V. GOLDMAN - Ap. J. 209, 912 (1976).
- 10 - D.A. GURNETT and al. - J. Geophys. Res. 86, 8833 (1981).
- 11 - K. PAPADOPOULOS and T. COFFEY - J. Geophys. Res. 79, 674 (1974).
- 12 - K.L. CHAN and R.N. HENRIKSEN - Astrophys. J. 241, 534 (1980).
- 13 - D.K. SWEETMAN - Nucl. Fusion 13, 157 (1973).
- 14 - Les Houches - Laser-plasma Interaction (1980).
- 15 - WEATHERALL and al. - J. Geophys. Res.
- 16 - A.A. GALEEV and al. - Sov. Phys. JETP 45(2), 226 (1977).

C H A P I T R E I I

EQUATIONS DE ZAKHAROV - AUTO-MODULATION

A. INTRODUCTION

Intéressons-nous aux phénomènes évoluant sur des échelles de temps lentes $\tau \gg (\mu^{1/2} \omega_p)^{-1}$ dans un plasma non collisionnel d'électrons et de protons de masse respective m_e et m_i .

Nous considérerons que le plasma est quasi-neutre et que les ions forment un fond continu homogène de densité n_0 .

Supposons qu'à la suite d'une instabilité (par exemple du type plasma-faisceau (1) ou de l'autostriction dans un condensat de turbulence faible (2), se développent dans le plasma des oscillations erratiques de Langmuir.

Ces oscillations sont caractérisées par un champ électrique $\vec{G}(\vec{x}, t)$ de haute fréquence ($\sim \omega_p^{-1}$), de grande longueur d'onde ($k \ll k_D$) et de faible amplitude :

$$\frac{\epsilon_0 |\vec{G}(\vec{x}, t)|^2}{3 n_0 k_B T} \ll 1 \quad (\text{II.A 1})$$

En se propageant dans le plasma ce champ électrostatique $\vec{G}(\vec{x}, t)$ va interagir avec le milieu.

On peut montrer que la diffusion de ces ondes hautes fréquences sur les fluctuations lentes et basses fréquences de densité (électroniques ou ioniques) $S_n(\vec{x}, t)$ est le principal mécanisme d'interaction.

Une description hydrodynamique du plasma permet d'obtenir le couple d'équations de Zakharov bien connu en turbulence forte de Langmuir (3).

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} + i \hat{Y} + \frac{3}{2} \omega_{pe} \lambda_D^2 \nabla \cdot \nabla \right] \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \omega_{pe} \frac{S_n(\vec{x}, t)}{n_0} \vec{E}(\vec{x}, t)$$

(II.A 2)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \hat{\gamma}_s \frac{\partial}{\partial t} - c_s^2 \Delta \right] \frac{\delta n(\vec{x}, t)}{n_0} = \frac{1}{2} c_s^2 \Delta \frac{\epsilon_0 |\vec{E}(\vec{x}, t)|^2}{2 n_0 k_B T} \quad (\text{II.A } 3)$$

où $\vec{E}(\vec{x}, t)$ est l'enveloppe complexe du champ, variant sur des temps lents et est telle que :

$$\vec{G}(\vec{x}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}(\vec{x}, t) e^{-i\omega_{pe} t} \right\} \quad (\text{II.A } 4)$$

Les fluctuations de densité $\delta n(\vec{x}, t)$ vérifient les relations :

$$\delta n(\vec{x}, t) \ll n_0 \quad (\text{II.A } 5)$$

et

$$n(\vec{x}, t) = n_0 \left(1 + \frac{\delta n(\vec{x}, t)}{n_0} \right)$$

c_s est la vitesse pseudo-sonore ionique :

$$c_s = \left(\frac{k_B T}{m_i} \right)^{1/2} = \left[\frac{k_B (T_e + \gamma_i T_i)}{m_i} \right]^{1/2} \quad (\text{II.A } 6)$$

γ_i est le facteur de compressibilité ionique.

Dans cette description la température électronique est uniforme ($\gamma_i = 1$).

$\hat{\gamma}$ est un opérateur décrivant un amortissement sur le mode de Langmuir. Cette dissipation dépend du mécanisme de l'instabilité considéré et a donc diverses origines physiques. Dans la gamme des petites échelles $\hat{\gamma}$ décrira l'absorption Landau des particules résonnantes du plasma. Mathématiquement $\hat{\gamma}$ se définit comme suit :

$$\hat{\gamma} \vec{E}(\vec{x}, t) = \int d\vec{x}' \gamma(\vec{x} - \vec{x}') \vec{E}(\vec{x}', t) \quad (\text{II.A } 7)$$

$\hat{\gamma}_s$ est l'analogie sur le mode pseudo-sonore ionique de $\hat{\gamma}$.

Avant d'expliquer le contenu physique de ces deux équations, effectuons les remarques suivantes :

★ Rigoureusement les effets de particules résonnantes sont redevables d'un traitement cinétique.

★ Nous avons supposé le champ haute fréquence électrostatique :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{0} \quad (\text{II.A } 8)$$

ce traitement se justifie si le plasma n'est pas trop chaud ($v_T^2/c^2 \ll 1$) (4).

★ Des équations similaires, pour le cas où le champ ne dérive pas d'un potentiel et où le champ magnétique n'est pas négligeable, ont été construites (5, 6).

★ Se donnant une densité lagrangienne il est possible, lorsque l'on omet toute dissipation, par un formalisme hamiltonien de déduire les équations précédentes (7).

Rappelons à présent le contenu physique de ces équations.

Le champ électrostatique turbulent $\vec{E}(\vec{x}, t)$ exerce, dans la description hydrodynamique, sur le fluide plasma une force \vec{F} , dite force pondéromotrice ou de Miller (2), telle que :

$$\vec{F} \simeq -k_B T \vec{\nabla} \cdot \left\{ \frac{\epsilon_0 \langle |\vec{E}(\vec{x}, t)|^2 \rangle}{2 n_0 k_B T} \right\} \quad (\text{II.A } 9)$$

Dans les régions de fort gradient de champ cette force va expulser les ions. Le plasma étant quasi-neutre les électrons, par diffusion ambipolaire, vont suivre le mouvement des ions.

Ainsi, sous l'action de la force pondéromotrice, se créent localement des zones de raréfaction de densité, ceci se traduit par le membre de droite de l'équation (II.A 3).

Ces perturbations, de densité $\delta n(\vec{x}, t)$ vont localement modifier la relation de dispersion $\omega(k)$ des ondes de Langmuir, celle-ci s'écrit alors :

$$\omega(k) \simeq \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} (k \lambda_D)^2 - \frac{\delta n(\vec{x}, t)}{n_0} \right) \quad (\text{II.A } 10)$$

D'un point de vue quantique nous pouvons interpréter l'équation (II.A 2) en tant qu'équation de Schrödinger pour les plasmons, quantas du champ de Langmuir, d'impulsion $\hbar k$ et d'énergie $E(k) = \hbar \omega(k)$.

(II.A 2) décrit alors l'évolution de la fonction d'onde $E(\vec{x}, t)$ des quasi-particules dans un potentiel attractif auto-généré $V(\vec{x}, t)$

$$V(\vec{x}, t) = -\hbar \omega_{pe} \frac{\delta n(\vec{x}, t)}{n_0} \quad (\text{II.A } 11)$$

Si, initialement, se créent des perturbations de densité, celles-ci conduisent, d'après (II.A 11), à une augmentation de la profondeur du puits de potentiel $V(\vec{x}, t)$. Dans ce cas, le nombre de plasmons réfléchi par la barrière de potentiel et restant piégé dans le puits s'accroît.

Cette croissance de la densité de quasi-particules piégées proportionnelles à $|\vec{E}(\vec{x}, t)|^2$ mène, d'après (II.A 3) à une augmentation de $S_n(\vec{x}, t)$ et le mécanisme précédent s'emballe. Il se développe, par ce mécanisme, une instabilité dans le plasma dite instabilité d'auto-modulation.

Il est clair toutefois que cette instabilité ne pourra prendre naissance que si le niveau d'énergie W des fluctuations de Langmuir est suffisamment élevé pour contrecarrer l'effet dispersif d'agitation thermique des particules du plasma d'énergie $n_o k_B T$.

Avant de discuter des critères d'amorçage de l'instabilité auto-modulationnelle, montrons que les équations (II.A 2,3) décrivent un phénomène tendant à transférer l'énergie turbulente aux grandes échelles. Nous montrerons aussi que sous une certaine condition, ce condensat aux grandes échelles peut devenir instable et être à l'origine de l'instabilité d'auto-modulation.

B. EFFET DE CONDENSATION

Prenons la transformée de Fourier du système de Zakharov (voir appendice A), le système s'écrit :

$$G_L^{-1}(\vec{x}) E(\vec{x}) = \frac{\omega_{pe}}{2n_o} \int \frac{d\vec{x}'}{(2\pi)^{d+1}} S_n(\vec{x}') E(\vec{x} - \vec{x}') \vec{e}_{\vec{k}'} \cdot \vec{e}_{\vec{k} - \vec{k}'} \quad (\text{II.B 1})$$

$$G_S^{-1}(\vec{x}) S_n(\vec{x}) = \frac{\epsilon_o}{4m_i} \int \frac{d\vec{x}'}{(2\pi)^{d+1}} E(\vec{x}') E^\dagger(\vec{x} - \vec{x}') \vec{e}_{\vec{k}'} \cdot \vec{e}_{\vec{k} - \vec{k}'} \quad (\text{II.B 2})$$

où " \dagger " dénote la transformée de Fourier du complexe conjugué, $\vec{e}_{\vec{k}} = \vec{k}/|\vec{k}|$,
 $\vec{x} \equiv (\vec{k}, \omega)$, nous avons également posé :

$$G_L^{-1}(\vec{X}) = \omega + i\gamma(k) - \omega_e(k) \quad ; \quad \omega_e(k) = \frac{3}{2} \omega_{pe} (k \lambda_D)^2$$

$$G_S^{-1}(\vec{X}) = [\omega^2 + 2i\omega\gamma_s(k) - \omega_s^2(k)] / k^2 \quad ; \quad \omega_s(k) = k c_s \quad (\text{II.B 3})$$

G_L et G_S sont respectivement les transformées de Fourier des fonctions de Green de l'enveloppe du champ et des perturbations de densité.

Etudions la stabilité des équations (II.B 1,2), pour ce faire linéarisons le système pour des perturbations longitudinales autour de l'état d'équilibre défini par :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{X}) &= [E_o(\vec{X}) + \delta E(\vec{X})] \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \\ n(\vec{X}) &= n_o(\vec{X}) + \delta n(\vec{X}) \end{aligned} \quad (\text{II.B 4})$$

avec les conditions :

$$\delta E(\vec{X}) \ll E_o(\vec{X}) \quad ; \quad \delta n(\vec{X}) \ll n_o(\vec{X}) \quad (\text{II.B 5})$$

Prenons la moyenne statistique sur les fluctuations de densité ; dans l'hypothèse des phases aléatoires (8) nous avons :

$$\langle \delta n(\vec{X}) \delta n(\vec{X}') \rangle = (2\pi)^{d+1} \delta(\vec{X} + \vec{X}') \langle \delta n \delta n \rangle_{\vec{X}} \quad (\text{II.B 6})$$

Les solutions non triviales pour l'enveloppe du champ ($\delta E(\vec{X}) \neq 0$) imposent alors :

$$\begin{aligned} G_L^{-1}(\vec{X}) - \frac{\omega_{pe} c_s^2}{4} \int \frac{d\vec{X}'}{(2\pi)^{d+1}} \left[G_S(0) + 2 G_S(\vec{X} - \vec{X}') (\vec{e}_R \cdot \vec{e}_{R'})^2 \right] \frac{\epsilon_o \langle E_o E_o \rangle}{2 n_o k_B T} \vec{X}' \\ - \frac{\omega_{pe}}{2 n_o} \int \frac{d\vec{X}'}{(2\pi)^{d+1}} G_L(\vec{X} - \vec{X}') (\vec{e}_R \cdot \vec{e}_{R-R'})^2 \langle \delta n \delta n \rangle_{\vec{X}'} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.B 7})$$

Intéressons-nous au terme médian de l'expression ci-dessus, identifions les parties réelles et imaginaires notées respectivement ω^{NL} et γ^{NL} , il vient :

$$\omega^{NL} = -\frac{\omega_{pe}}{4} \int \frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^d} \left[\frac{2\omega_s(\vec{k}'') \Delta\omega_e^2 - \omega_s^2(\vec{k}'') (\vec{e}_R \cdot \vec{e}_{R'})^2}{D(\omega)} - 1 \right] \frac{\epsilon_0 \langle E_0 E_0 \rangle_{R'}}{2n_0 k_B T} \quad (II.B 8)$$

$$\gamma^{NL} = \frac{\omega_{pe}}{2} \int \frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^d} \omega_s^2(\vec{k}'') \frac{2 \Delta\omega_e \gamma_s(\vec{k}'')}{D(\omega)} \vec{e}_{R'} \cdot \vec{e}_R \frac{\epsilon_0 \langle E_0 E_0 \rangle_{R'}}{2n_0 k_B T} \quad (II.B 9)$$

où nous avons posé :

$$D(\omega) = \left[\Delta\omega_e^2 - \omega_s^2(\vec{k}'') \right]^2 + 4 \Delta\omega_e^2 \gamma_s(\vec{k}'') \quad (II.B 10)$$

$$\Delta\omega_e = \omega_e(\vec{k}) - \omega_e(\vec{k}') \quad (II.B 11)$$

Le terme ω^{NL} décrit un décalage non linéaire de l'ensemble du spectre de Langmuir ; cet effet Doppler, identique pour toutes les longueurs d'ondes, n'affecte pas la répartition de l'énergie turbulente sur les diverses gammes d'échelles.

γ^{NL} s'identifie à un taux de croissance Landau non linéaire, déterminons son origine physique. Remarquons que γ^{NL} est proportionnel à l'énergie des ondes ; il est bien connu (8) que, dans ce cas, les seuls processus permis sont les réactions de décompositions (ou de fusions) à trois ondes et les processus de diffusion induits sur les particules. De plus, dans le cas des ondes de Langmuir, les processus de diffusion induits sont les seuls autorisés par les règles de sélection pour $T_e \sim T_i$. Nous en concluons que pour $T_e \sim T_c$ γ^{NL} décrit principalement le phénomène non linéaire :

$$i + e \rightleftharpoons i' + e' \quad (II.B 12)$$

c'est-à-dire la diffusion sur les ions du plasma, réaction satisfaisant à la règle de sélection :

$$\omega_e(\vec{k}) \pm \omega_e'(\vec{k}') - (\vec{k} \pm \vec{k}') \cdot \vec{v} = 0 \quad (II.B 13)$$

Examinons le cas le plus fréquent (machines à fusion, vent solaire) où la température ionique T_i est plus faible que la température électronique T_e . Dans ce cas l'absorption des ondes acoustiques ioniques par l'effet Landau des ions est très faible, $\gamma_s(k'') \sim 0$ mais $\gamma_s \ll \omega_s$, et la propagation de ces ondes dans le plasma est possible ; l'interaction onde-onde

$$e \pm s \rightleftharpoons e' \quad (\text{II.B 14})$$

devient un processus dominant. Dans l'approximation $\gamma_s(k'') \sim 0$ nous pouvons ré-écrire γ^{NL} sous la forme (voir appendice d) :

$$\gamma^{NL} = \frac{\pi}{2} \omega_{pe} \int \frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^d} \frac{\omega_s^2}{\Delta\omega_e} \left| \delta(\Delta\omega_e - \omega_s'') - \delta(\Delta\omega_e + \omega_s'') \right| (\vec{e}_{\vec{k}'} \cdot \vec{e}_{\vec{k}})^2 \frac{\epsilon_0 \langle E_0 E_0 \rangle_{\vec{k}'}}{n_0 k_B T} \quad (\text{II.B 15})$$

Préoccupons-nous des conditions de résonance, celles-ci doivent satisfaire :

$$|\vec{k} - \vec{k}'| = \pm \vec{k}''$$

et

$$\omega_e - \omega_e' = \pm \omega_s'' \quad (\text{II.B 16})$$

Utilisons la première condition, explicitons ω_e et ω_s'' , la deuxième condition se réécrit :

$$\cos \phi = \pm \frac{2k_*}{|\vec{k} + \vec{k}'|} \quad (\text{II.B 17})$$

où ϕ est l'angle formé par les nombres d'ondes $(\vec{k} + \vec{k}')/2$ et \vec{k}'' .

La condition d'existence de la condition (II.B 17) impose :

$$|\vec{k}' + \vec{k}| \geq 2k_* \quad (\text{II.B 18})$$

Nous pouvons alors distinguer deux types d'interactions dans l'espace des nombres d'ondes satisfaisant la condition (II.B 18) : les interactions locales et non locales.

a - Interactions locales

Nous parlerons d'interactions locales autour du nombre d'onde k_* lorsque les nombres d'ondes k' et k seront de l'ordre de k_* .

Dans l'hypothèse d'isotropie γ^{NL} peut se mettre sous la forme (voir appendice d) :

$$\gamma^{NL} = -\frac{2\pi}{3} \omega_{pe} R_*^2 \frac{\partial}{\partial R} \frac{W(R)}{n_0 R_B T} \quad (\text{II.B 19})$$

Le spectre turbulent évolue alors selon la loi :

$$\frac{\partial W(R)}{\partial t} = -\gamma^{NL} W(R) = -\frac{\partial}{\partial R} [R \nu(R) W(R)] \quad (\text{II.B 20})$$

où le taux de transfert $\nu(k)$ s'identifie aisément :

$$\nu(R) = -\frac{\pi}{3} \left(\frac{R_*}{R}\right)^2 \frac{R W(R)}{n_0 R_B T} \omega_{pe} \quad (\text{II.B 21})$$

L'on peut approximer, pour $k \sim k_x$, $\nu(k)$ par :

$$\nu(R) \simeq -\frac{\pi}{3} \frac{W_*}{n_0 R_B T} \omega_{pe} \quad (\text{II.B 22})$$

b - Interactions non locales

Dans ce type d'interaction nous considérons que le nombre d'onde k caractéristique du champ fluctuant se situe aux grandes échelles ($k < k_x$), alors l'inégalité (II.B 18) sera vérifiée pour des nombres d'ondes k' situés à des échelles intermédiaires ($k' > k_x$).

Dans l'hypothèse d'isotropie le taux de croissance des interactions non locales s'écrit (voir appendice d) :

$$\gamma^{NL} = \frac{\pi}{24} \omega_{pe} \frac{R^2 - 4 R_*^2}{R_*^2} \frac{R_* W(2 R_*)}{n_0 R_B T} \quad (\text{II.B 23})$$

d'où l'équation spectrale :

$$\frac{\partial W(R)}{\partial t} = -\gamma^{NL} W(R) \quad (\text{II.B 24})$$

c - Conséquences des interactions locales et non locales

Dans le cas de la turbulence de Langmuir il est bien connu que les processus de diffusions sur les particules du plasma et de décompositions à trois ondes sont responsables du refoulement de l'énergie des fluctuations aux grandes échelles ($k \rightarrow 0$) ; de plus la perte d'énergie dans ces réactions est très faible (8,9).

Ainsi, les phénomènes que nous avons montrés conduisent simplement à l'accumulation de l'énergie dans les oscillations de Langmuir aux petits nombres d'ondes. Nous pouvons parler d'une condensation de l'énergie des fluctuations aux grandes échelles.

Les plasmons obéissant à la statistique de Bose-Einstein, ce comportement peut être interprété par la tendance des bosons à se condenser vers les échelles fondamentales (10).

d - Domaine de validité

Si nous remarquons que les expressions précédentes ont été déduites dans l'hypothèse d'un champ turbulent dont la phase est aléatoire, le domaine de validité des équations précédentes se définit par la condition :

$$[\Delta\omega(k)]^{-1} \ll t_{NL} \quad (\text{II.B 25})$$

où t_{NL} est l'échelle de temps du processus non linéaire considéré et $(\Delta\omega(k))^{-1}$ le temps de corrélation du spectre d'onde excité. Pour le spectre de Langmuir nous avons :

$$\omega(k) \simeq \omega_{pe} \left[1 + \frac{3}{2} (k\lambda_D)^2 \right]$$

d'où

$$\Delta\omega(k) \simeq 3 (k\lambda_D)^2 \omega_{pe}$$

(II.B 26)

A partir des équations précédentes nous pouvons estimer t_{NL} en le calculant comme suit :

$$t_{NL} \simeq \left(\frac{W}{n_0 k_B T} \right)^{-1} \omega_{pe}^{-1} \quad (\text{II.B 27})$$

où W est la densité d'énergie turbulente de Langmuir.

Utilisons ces relations, l'inégalité (II.B 25) conduit à :

$$\frac{W}{n_0 k_B T} \ll 3 (k \lambda_D)^2 \quad (\text{II.B 28})$$

k étant un nombre d'onde typique du condensat.

Nous verrons que si l'inégalité (II.B 28) n'est pas vérifiée, le condensat est instable face aux modulations de densité.

Nous concluons que l'auto-modulation peut être déclenchée par le condensat langmuirien, vidant celui-ci de son énergie et la transférant vers les petites échelles où l'absorption Landau est prépondérante.

C. DESCRIPTION LAGRANGIENNE

a - Introduction

Nous allons, dans ce paragraphe, étudier quelques propriétés des équations de Zakharov et mettre en évidence quelques analogies dans le cas particulier d'un champ scalaire. Cette simplification ne modifie pas les propriétés que nous nous proposons d'exposer (11).

Avant tout calcul introduisons, par simplicité d'écriture, un système d'unité non dimensionné :

$$\begin{aligned} \tau &= (\mu \omega_{pe})^{-1} \tau & \mu &= \frac{m_e}{3m_i} \\ x &= k_*^{-1} x & k_* &= \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/2} k_D & v &= \frac{v}{v_{Te}} \\ \varphi &= \frac{8n}{\mu n_0} & \Psi &= \left(\frac{\epsilon_0}{2n_0 k_B T \mu}\right)^{1/2} E \end{aligned} \quad (\text{II.C 1})$$

Dans ce système les équations de Zakharov, sous forme scalaire, se réécrivent :

$$\left[i \frac{\partial}{\partial \tau} + i \hat{\gamma} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \right] \Psi = \frac{1}{2} \Psi \Psi \quad (\text{II.C 2})$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\gamma_s \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right] \varphi = \frac{1}{2} \Delta |\varphi|^2 \quad (\text{II.C } 3)$$

Introduisons le petit paramètre plasma de la turbulence ϵ_T , égal au rapport de la densité d'énergie des fluctuations à l'énergie thermique du plasma :

$$\epsilon_T = \frac{W}{n_0 k_B T} \quad (\text{II.C } 4)$$

Les équations (II.C 2,3) décrivent des phénomènes au premier ordre du paramètre ϵ_T ($O(\epsilon_T)$), toutefois nous constatons la dissymétrie de ces équations en fonction de ϵ_T , en effet nous avons :

$$\varphi = O(\epsilon_T) \quad (\text{II.C } 5)$$

et

$$\psi = O(\epsilon_T^{1/2}) \quad (\text{II.C } 6)$$

Il serait donc bon de substituer à l'équation sur l'enveloppe complexe du champ une équation analogue mais au premier ordre en ϵ_T .

Posons :

$$\psi = \rho^{1/2} e^{-i\theta} \quad (\text{II.C } 7)$$

où $\rho^{1/2}$ est l'amplitude de l'enveloppe complexe du champ et θ sa phase. Nous constatons immédiatement que ρ est du premier ordre en ϵ_T ($\rho = O(\epsilon_T)$). Par la suite nous nous efforcerons d'exhiber une équation décrivant l'évolution de ρ , la symétrie par rapport au petit paramètre ϵ_T sera ainsi réalisée.

Nous avons déjà mentionné qu'il était possible par la connaissance d'une densité lagrangienne \mathcal{L} de déduire les équations de Zakharov.

Donnons-nous \mathcal{L} (12)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_{int} \quad (\text{II.C } 8)$$

où \mathcal{L}_p est la densité lagrangienne libre des plasmons :

$$\mathcal{L}_p = \frac{i}{2} [\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*] - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi^* \quad (\text{II.C } 9)$$

\mathcal{L}_s est la densité lagrangienne libre des phonons :

$$\mathcal{L}_s = \psi \partial_t \phi - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{1}{2} \psi^2 \quad (\text{II.C 10-})$$

\mathcal{L}_{int} est la densité lagrangienne non-linéaire plasmons-phonons, à l'ordre le plus bas nous pouvons écrire :

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{2} \psi \psi^* \psi \quad (\text{II.C 11})$$

ϕ est le potentiel hydrodynamique tel que :

$$\vec{v} = -\vec{\nabla} \phi \quad (\text{II.C 12})$$

Rappelons que ψ, ψ^*, ϕ et les dérivées premières spatiales et temporelles sont traités en variables indépendantes.

Nous pouvons à l'aide des équations de Lagrange généralisées,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \partial^\beta Q_m} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_m} \quad (\text{II.C 13})$$

(voir la référence (13) pour les notations), décrire l'évolution de ϕ et des perturbations de densité ainsi, bien sûr, que les équations de Zakharov ; notons que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi = \psi + \frac{1}{2} \psi \psi^* \quad (\text{II.C 14})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \Delta \phi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (\text{II.C 15})$$

b - Nouvelle formulation

Montrons qu'il est possible, à partir de la densité lagrangienne (II. C 8) d'exhiber de nouvelles équations décrivant l'auto-modulation.

Opérons la transformation canonique (II.C 7) sur les variables de champ de la densité lagrangienne \mathcal{L}_p , il vient pour nouvelle densité \mathcal{L}'_p :

$$\mathcal{L}'_p = \rho \partial_t \theta - \frac{1}{2} \rho (\vec{\nabla} \theta)^2 - \mathcal{E}(\rho) \quad (\text{II.C 16})$$

où

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1}{8} \rho^{-1} (\vec{\nabla} \rho)^2 \quad (\text{II.C 17})$$

Nous remarquons que \mathcal{L}'_p est identique à la densité lagrangienne décrivant un fluide barotrope et irrotationnel de densité d'énergie interne $\varepsilon(\rho)$. Dans cette description fluide θ est interprétée en tant que potentiel hydrodynamique et est reliée à la vitesse \vec{u} du fluide par la relation :

$$\vec{u} = - \vec{\nabla} \theta \quad (\text{II.C 18})$$

Notons que dans la description onde \vec{u} n'est autre que la vitesse de groupe des plasmons, soit en unité dimensionnée $3(k\lambda_D) v_{Te}$.

La transformation (II.C 7) nous permet donc de "parler" d'un fluide de plasmons de densité ρ .

Symétrisons entièrement notre problème et décrivons les phonons en tant que fluide, barotrope et irrotationnel, de densité ρ . La densité lagrangienne \mathcal{L}'_s associée peut, de la même façon que le fluide de plasmons, s'écrire :

$$\mathcal{L}'_s = \bar{\rho} \partial_t \phi - \frac{1}{2} \mu \bar{\rho} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \bar{\varepsilon}(\bar{\rho}) \quad (\text{II.C 19})$$

\mathcal{L}_s peut se déduire de \mathcal{L}'_s , en effet posons :

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \varphi \quad (\text{II.C 20})$$

où $\bar{\rho}_0$, $\bar{\rho}_0 = \mu^{-1}$, est la densité du fluide de phonons dans un état d'équilibre. Substituons dans (II.C 19) l'expression (II.C 20) et gardons dans \mathcal{L}'_s les termes quadratiques, nous obtenons \mathcal{L}_s .

D'autre part, de la forme générale de la densité d'énergie interne $\bar{\varepsilon}(\bar{\rho})$ d'un fluide (14) et à l'ordre le plus bas nous pouvons écrire :

$$\bar{\varepsilon}(\bar{\rho}) \simeq \frac{1}{2} (\bar{\rho} - \bar{\rho}_0)^2 \quad (\text{II.C 21})$$

Terminons cette modélisation en précisant qu'avec nos nouvelles variables de champ la densité lagrangienne d'interaction \mathcal{L}_{int} s'écrit :

$$\mathcal{L}'_{\text{int}} = - \frac{1}{2} \rho (\bar{\rho} - \bar{\rho}_0) \quad (\text{II.C 22})$$

c - Equations fluide

Connaissant notre nouvelle densité lagrangienne \mathcal{L}' ,

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'_p + \mathcal{L}'_s + \mathcal{L}'_{int} \quad (\text{II.C } 23)$$

il est aisé de déduire, à l'aide des équations de Lagrange (II. C 13), les équations d'évolution de notre système de deux fluides. Posons :

- $Q_m = \theta$, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} = 0 \quad (\text{II.C } 24)$$

- $Q_m = \phi$, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \mu \vec{\nabla} \cdot \bar{\rho} \vec{v} = 0 \quad (\text{II.C } 25)$$

- $Q_m = \rho$, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = \frac{1}{2} \vec{u}^2 + \frac{1}{8} \frac{(\vec{\nabla} \rho)^2}{\rho^2} - \frac{1}{4} \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \quad (\text{II.C } 26)$$

- $Q_m = \bar{\rho}$, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 + \frac{\partial \bar{E}(\bar{\rho})}{\partial \bar{\rho}} + \frac{1}{2} \rho \quad (\text{II.C } 27)$$

Les équations (II.C 26,27) décrivent respectivement l'évolution des potentiels hydrodynamiques des fluides de plasmons et de phonons. Nous remarquons aussi que l'équation (II.C 14) n'est autre que (II.C 27) linéarisée autour des états d'équilibre :

$$\bar{\rho} = \rho_0 + \varphi \quad \rho_0 = \mu^{-1} \quad (\text{II.C } 28)$$

$$\phi = \phi_0 + \phi \quad \phi_0 = 0 \quad (\text{II.C } 29)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v} \quad \vec{v}_0 = \vec{0} \quad (\text{II.C } 30)$$

Les équations (II.C 24,25) sont les équations de continuité pour les deux fluides considérés. Notons également que (II.C 15) n'est autre que (II.C 25) linéarisée autour des états d'équilibre (II.C 28,30).

De plus, intégrons (II.C 24) sur un volume (V) délimité par une surface fermée (S), transformons le deuxième terme à l'aide du théorème d'Ostrogradsky, si nous cherchons des solutions localisées ce terme de flux s'annule, il vient pour l'invariant N :

$$N = \int dx^d \rho \quad (\text{II.C } 31)$$

N constant exprime, dans la description onde, la conservation du nombre de plasmons. Le même type de raisonnement s'applique à l'équation (II.C 25), il vient pour la conservation du nombre de phonons \bar{N} (dans la description onde) :

$$\bar{N} = \int d^d x \bar{\rho} \quad (\text{II.C 32})$$

Nous verrons que dans un certain cas (cas supersonique) \bar{N} ne se conserve pas (par suite d'un rayonnement d'onde sonore).

d - Energie et impulsion du champ

Donnons-nous une action \mathcal{K} telle que :

$$\mathcal{K} = \int d^{d+1} x \mathcal{L}'(Q_m, \partial^\alpha Q_m) \quad (\text{II.C 33})$$

Connaissant \mathcal{K} et \mathcal{L}' nous pouvons utiliser les résultats de la théorie des champs.

Quand l'action est invariante par translation spatio-temporelle,

$$x^\alpha \longrightarrow x'^\alpha = x^\alpha + \delta x^\alpha$$

des considérations générales imposent l'annulation de la divergence du tenseur d'énergie-impulsion $T^{\alpha\beta}(x)$ (14).

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}(x) = \vec{0} \quad (\text{II.C 34})$$

où

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_m \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \partial_\alpha Q_m} \partial^\beta Q_m - g^{\alpha\beta} \mathcal{L}' \quad (\text{II.C 35})$$

Distinguons les cas $\beta = 0$ et $\beta \neq 0$.

- $\beta = 0$ ou invariance par translation temporelle $t \rightarrow t' = t + \delta t$

Explicitons les expressions (II.C 35) et (II. 34), il vient pour équation d'évolution de la densité d'énergie $\mathcal{H} = T^{00}$ du système :

$$\partial_t \mathcal{H} + c \partial_i T^{i0} = 0 \quad (\text{II.C 36})$$

Appliquons le théorème de la divergence, pour des champs localisés. Le deuxième terme de (II.C 36) ne donne aucune contribution et nous obtenons la conservation de l'énergie H du système :

$$H = \int d^d x \mathcal{H} = \int d^d x (\mathcal{H}_p + \mathcal{H}_s + \mathcal{H}_{int}) \quad (\text{II.C } 37)$$

où \mathcal{H}_p est, selon la description que l'on considère, la densité d'énergie du champ électrostatique de Langmuir ou la densité d'énergie du fluide de plasmons.

$$\mathcal{H}_p = \begin{cases} \frac{1}{2} \vec{\nabla} \psi^2 & \text{pour les ondes de Langmuir} \\ \frac{1}{8} \frac{(\vec{\nabla} \rho)^2}{\rho} + \frac{1}{2} \rho \vec{u}^2 & \text{pour le fluide de plasmons} \end{cases} \quad (\text{II.C } 38)$$

\mathcal{H}_s est soit la densité d'énergie dans les ondes sonores, soit la densité d'énergie du fluide de phonons :

$$\mathcal{H}_s = \begin{cases} \frac{1}{2} (\vec{v}^2 + \varphi^2) & \text{pour les ondes sonores} \\ \frac{1}{2} \mu \bar{\rho} v^2 + \bar{\mathcal{E}}(\bar{\rho}) & \text{pour le fluide} \end{cases} \quad (\text{II.C } 39)$$

\mathcal{H}_{int} est la densité d'énergie d'interaction :

$$\mathcal{H}_{int} = \begin{cases} \frac{1}{2} |\psi|^2 \varphi & \text{pour le système dans la description ondes} \\ \frac{1}{2} \rho (\bar{\rho} - \bar{\rho}_0) & \text{pour le système fluide} \end{cases} \quad (\text{II.C } 40)$$

- $\beta \neq 0$ ou invariance par translation spatiale $r \rightarrow r' = r + \delta r$

Développons (II.C 34,35) et réexprimons la densité lagrangienne à l'aide des équations (II.C 26,27), nous obtenons alors le couple d'équations décrivant l'évolution de la densité d'impulsion des deux fluides :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{u} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = \rho \vec{g} \quad (\text{II.C } 41)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \vec{v} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{\pi} = \bar{\rho} \vec{F} \quad (\text{II.C } 42)$$

\vec{T} et $\vec{\Pi}$ sont respectivement les tenseurs densité de flux d'impulsion des fluides de plasmons et de phonons, il s'écrivent :

$$\vec{T}^{ij} = \rho u^i u^j + \frac{1}{4} [\rho^{-1} \partial_i \rho \partial_j \rho - \delta_j^i \Delta \rho] \quad (\text{II.C 43})$$

$$\vec{\Pi}^{ij} = \mu \bar{\rho} v^i v^j + \delta_j^i P(\bar{\rho}) \quad (\text{II.C 44})$$

Examinons leur signification physique. La quantité $\rho u^i u^j$ ainsi que $\mu \bar{\rho} v^i v^j$ déterminent la partie de la densité de flux due au transport direct d'impulsion avec le fluide en mouvement.

La quantité aux dérivées premières de ρ traduit une dispersion en vitesse dans le transport de l'impulsion et est redevable de l'agitation thermique du fluide de plasmons. Le scalaire $-\frac{1}{4} \Delta \rho$ est un terme de compression dont l'origine est, dans la description onde, la pression exercée par le champ haute fréquence de Langmuir.

Le terme $P(\bar{\rho}) = \bar{\rho} \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}(\bar{\rho})}{\partial \bar{\rho}} - \bar{\mathcal{E}}(\bar{\rho})$ est la pression du fluide de phonons.

D'autre part nous avons posé :

$$\vec{g} = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi \quad \text{et} \quad \vec{F} = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} \rho \quad (\text{II.C 45})$$

Nous interpréterons \vec{g} (\vec{F}) en tant que force, dérivant d'un potentiel $\bar{\rho}(\rho)$, s'exerçant sur le fluide de plasmons (de phonons).

e - Analogie avec un système auto-gravitant

Appliquons l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ aux équations (II.C 24,25) il vient, en utilisant (II.C 41,42), pour équation des densités des deux fluides :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{T} = - \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{g} \quad (\text{II.C 46})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\rho} - \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = - \mu \vec{\nabla} \cdot \bar{\rho} \vec{F} \quad (\text{II.C 47})$$

(Si nous désirons tenir compte de la dissipation nous pourrions effectuer la substitution $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + 2 \gamma$).

Effectuons un rapprochement avec l'instabilité de Jeans (15). Nous pouvons alors considérer que l'équation (II.C 46) décrit un fluide, ou un gaz, de plasmons dans son propre champ de gravitation \vec{g} . $\bar{\rho}$ peut, dans cette optique, être interprété comme le potentiel gravitationnel et l'équation (II.C 47) l'analogie de l'équation de Poisson de ce même potentiel dans le cas de la vraie instabilité auto-gravitationnelle.

Considérons un état perturbé d'un gaz, initialement au repos et uniforme, de plasmons légèrement déplacé, d'une quantité $\delta\rho$, de sa position d'équilibre ρ_0 . Une telle perturbation, de dimension spatiale λ , va produire deux effets : d'une part un changement de pression $|\delta p| = \frac{1}{4} \Delta\delta\rho$ du gaz de plasmons, d'autre part une augmentation de la force gravitationnelle $|\delta f| = \frac{1}{2} \rho_0 |\vec{\nabla}\varphi|$ agissant sur le milieu perturbé (cf. équation II.C 46).

De plus nous supposerons qu'au moins au début du processus, la petite perturbation φ du pseudo-potentiel de gravitation créée par les déséquilibres du gaz de plasmons évolue adiabatiquement ($\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho \approx 0$ et $|\vec{v}| \approx 0$), dans ce cas l'équation (II.C 47) conduit à $\varphi \sim \rho$.

Donc, si initialement la variation d'énergie d'interaction pseudo-gravitationnelle ($\sim \frac{1}{2} \delta\rho \varphi$) excède la variation d'énergie interne du gaz de plasmons ($\sim \frac{1}{8} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho_0}$) nous serons dans une situation instable et, tout comme pour l'instabilité de Jeans, le gaz de plasmons va se fragmenter en diverses condensations à des distances telles que les variations des deux types d'énergies se compensent.

Nous sommes également en mesure de donner un équivalent de la longueur d'onde critique de Jeans. Ecrivons que, lorsqu'un équilibre est atteint, l'augmentation du gradient de pression $|\vec{\nabla}\delta p| \sim \delta\rho/\lambda^3$ dû à la perturbation est égal à la variation de la force gravitationnelle $\rho_0 |\vec{\nabla}\varphi| \sim \rho_0 \varphi/\lambda$. Il vient dans l'hypothèse de mouvements quasi-statiques :

$$\lambda = \lambda_0 \approx \rho_0^{-1/2} \quad (\text{II.C 48})$$

Pour des longueurs d'onde λ de la perturbation plus grande que la longueur d'onde critique de l'auto-modulation λ_a , se déclenchera l'instabilité dite d'auto-modulation que nous pourrions considérer comme l'analogie pour les plasmas de l'instabilité de Jeans en astrophysique.

Ces condensations ρ de "matière" vont avoir tendance à s'effondrer sur elles-mêmes. Nous nommerons ces régions de l'espace de fortes concentrations de densité de plasmons des cavités. Le mot cavité se justifie si l'on remarque que $\varphi < 0$, ce qui signifie une raréfaction de densité du plasma dans ces régions.

Examinons plus rigoureusement, dans le paragraphe suivant, les critères d'établissement de l'instabilité.

D. EQUATION DE DISPERSION DE L'AUTO-MODULATION - STABILITE

Remarquons que nous pouvons étudier les conditions de l'établissement de l'instabilité d'auto-modulation soit en utilisant la description "onde", c'est-à-dire en partant des équations de Zakharov, soit en utilisant la description "fluide", c'est-à-dire en utilisant les expressions précédemment établies. Nous choisirons le formalisme fluide pour développer ce formalisme.

Examinons à présent la stabilité de notre système, dans le cas non dissipatif, en présence de petites perturbations et préoccupons-nous d'établir une relation de dispersion $\omega = \omega(k)$.

Nous supposons qu'à l'équilibre le milieu est uniforme avec :

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}, t) &= \rho_0 + \delta\rho(\vec{x}, t) & ; & & \bar{\rho}(\vec{x}, t) &= \bar{\mu}^{-1} + \delta\bar{\rho}(\vec{x}, t) \\ \vec{u}(\vec{x}, t) &= \vec{u}_0 + \delta\vec{u}(\vec{x}, t) & ; & & \vec{v}(\vec{x}, t) &= \vec{v}_0 + \delta\vec{v}(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (\text{II.D } 1)$$

où l'indice "0" dénote l'état d'équilibre et où les incréments $\delta\rho$, $\delta\bar{\rho}$, $|\delta\vec{u}|$, $|\delta\vec{v}|$, sont petits au sens, par exemple pour la densité de plasmons, où nous avons $\delta\rho/\rho_0 \ll 1$. Nous posons qu'en l'absence de perturbation le fluide de plasma est au repos ($|\vec{v}_0| = 0$).

Linéarisons les équations (II.C 24, 41, 47) autour des valeurs d'équilibres (II.D 1), prenons les transformées de Fourier de ces trois équations ainsi linéarisées, nous obtenons le système :

$$\begin{vmatrix} \omega - \vec{k} \cdot \vec{u}_0 & -\rho_0 \vec{k} & 0 \\ -\frac{1}{4} k^2 \vec{k} & \rho_0 (\omega - \vec{k} \cdot \vec{u}_0) & -\frac{1}{2} \rho_0 \vec{k} \\ \frac{1}{2} k^2 & 0 & k^2 - \omega^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta\rho(\vec{x}) \\ \delta\vec{u}(\vec{x}) \\ \delta\bar{\rho}(\vec{x}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{II.D } 2)$$

Les solutions non triviales imposent l'annulation du déterminant, d'où l'équation de dispersion :

$$(\omega^2 - k^2) \left[(\omega - \vec{k} \cdot \vec{u}_0)^2 - \frac{1}{4} k^4 \right] - \frac{1}{4} \rho_0 k^4 = 0 \quad (\text{II.D 3})$$

Notons que, d'après la définition (II.C 18), \vec{u}_0 est égal à \vec{k}_0 .
Plaçons-nous dans le cas où $k \gg k_0$, nous pouvons alors faire $k_0 \sim 0$. Cette hypothèse, dite du dipôle, peut être justifiée dans certaines expériences de fusion laser (15), bien que dans d'autres situations physiques, par exemple dans la couronne solaire (16), celle-ci soit sujette à caution ; quoiqu'il en soit nous retiendrons cette approximation qui va nous permettre de fournir des expressions analytiques qui décrivent correctement le phénomène.

Cherchons les solutions de (II.D 3), avec $u_0 = 0$, donnant lieu à une instabilité ($\omega^2 < 0$), nous pouvons exhiber deux régimes distincts : subsonique et supersonique.

a - Cas subsonique

Il est légitime, dans les premiers instants où l'instabilité se développe, de supposer que nous avons une phase quasi-statique pour le plasma, c'est-à-dire que nous pouvons poser $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \approx 0$ et $v \approx 0$. Cette hypothèse est analogue à considérer le fluide de phonons dans un équilibre hydrostatique.

Dans ce cas l'équation de dispersion se réécrit :

$$\omega^2 - \frac{1}{4} k^4 + \frac{1}{4} \rho_0 k^2 = 0 \quad (\text{II.D 4})$$

Alors pour des nombres d'ondes $k < k_s$, avec

$$k_s = \rho_0^{1/2} \quad \text{soit} \quad k_s = \left(\frac{1}{3} \frac{W}{n_0 k_B T} \right)^{1/2} \rho_D \quad (\text{II.D 5})$$

se déclenchera une instabilité dont l'incrément aura pour expression :

$$\gamma = \frac{1}{2} k (\rho_0 - k^2)^{1/2} \quad (\text{II.D 6})$$

Pour un nombre d'onde k_{sub} , avec

$$R_{\text{sub}} = 2^{-1/2} \rho_0^{1/2} \quad \text{soit} \quad R_{\text{sub}} = \left(\frac{1}{6} \frac{W}{n_0 k_B T} \right)^{1/2} R_D \quad (\text{II.D } 7)$$

le taux de croissance maximal γ_{sub} de l'instabilité est atteint pour :

$$\gamma_{\text{sub}} = \frac{1}{4} \rho_0 \quad \text{soit} \quad \gamma_{\text{sub}} = \frac{1}{4} \frac{W}{n_0 k_B T} \omega_{pe} \quad (\text{II.D } 8)$$

De la condition des mouvements lents (ici $\gamma_{\text{sub}} \ll k_{\text{sub}}$) nous pouvons déterminer la plage de densité de plasmons, c'est-à-dire l'intensité des oscillations de Langmuir, pour laquelle l'auto-modulation peut naître ; il vient, à un terme de l'unité près :

$$\rho_0^{1/2} \ll 1 \quad \text{soit} \quad \frac{W}{n_0 k_B T} \ll \mu \quad (\text{II.D } 9)$$

Remarquons aussi que l'expression (II.D 5) justifie la discussion du paragraphe précédent (cf II.C 48).

Les équations décrivant l'auto-modulation dans ce régime s'écriront :

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{1}{2} \rho & \vec{v} &= \vec{0} \\ \text{et} & & & \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{T} &= -\frac{1}{4} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\nabla} \rho) \end{aligned} \quad (\text{II.D } 10)$$

D'autre part nous remarquons que la condition (II.D 5), que nous réécrivons sous la forme :

$$\frac{W}{n_0 k_B T} \gg 3 (R \lambda_D)^2 \quad (\text{II.D } 11)$$

est l'inégalité pour laquelle le condensat de Langmuir est instable (cf II.D 28). Ainsi l'amorçage de l'auto-modulation peut être assuré par un amas langmuirien aux petites échelles, pourvu que l'inégalité (II.D 11) soit vérifiée.

Concluons ce cas en précisant que si initialement $W \ll \mu n_0 k_B T$, dû à l'instabilité, W va croître proportionnellement à $\exp(2\gamma_{\text{sub}} t)$ alors l'inégalité (II.D 9) va être violée. Le système va évoluer, dans un second temps, vers un régime trans-sonique (régime dans lequel nous devrons utiliser les équations sans aucune approximation) et où $W \sim \mu n_0 k_B T$. Ultimement le système évoluera vers un régime où $W \gg \mu n_0 k_B T$, c'est le régime supersonique.

b - Cas supersonique

Ce cas correspond à une densité de plasmons ρ_0 telle que :

$$\rho_0 \gg 1 \quad \text{soit} \quad \frac{W}{n_0 k_B T} \gg \mu \quad (\text{II.D 12})$$

L'équilibre hydrostatique du plasma n'est plus assuré et le terme de compression devient négligeable face à la dynamique du fluide. L'équation de dispersion se réécrit :

$$\omega^4 - \frac{1}{4} k^4 \omega^2 - \frac{1}{4} \rho_0 k^4 = 0 \quad (\text{II.D 13})$$

Une analyse de cette équation permet de mettre en évidence un mode instable pour tous les nombres d'ondes k , l'incrément γ a pour expression :

$$\gamma = 2^{-3/2} k^2 \left[-1 + \left(1 + \frac{16 \rho_0}{k^4} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (\text{II.D 14})$$

Au petit nombre d'onde ce taux se comportera comme :

$$\gamma \simeq \rho_0^{1/4} k \quad (\text{II.D 15})$$

Le taux de croissance maximal γ_{sup} de l'instabilité est atteint pour un nombre d'onde k_{sup} , donné approximativement par :

$$k_{\text{sup}} \simeq 2 \rho_0^{1/4} \quad \text{soit} \quad k_{\text{sup}} \simeq \left(\frac{\mu W}{n_0 k_B T} \right)^{1/4} k_D \quad (\text{II.D 16})$$

et a pour ordre de grandeur :

$$\gamma_{\text{sup}} \simeq \rho_0^{1/2} \quad \text{soit} \quad \gamma_{\text{sup}} \simeq \left(\frac{\mu W}{n_0 k_B T} \right)^{1/2} \omega_{pe} \quad (\text{II.D 17})$$

Précisons que dans ce régime notre couple d'équations se réécrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = \frac{1}{2} \Delta \varphi \rho \quad (\text{II.D 18})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{T} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{\nabla} \varphi \quad (\text{II.D 19})$$

Les figures (D 1,2) résument l'étude exposée en a) et b).

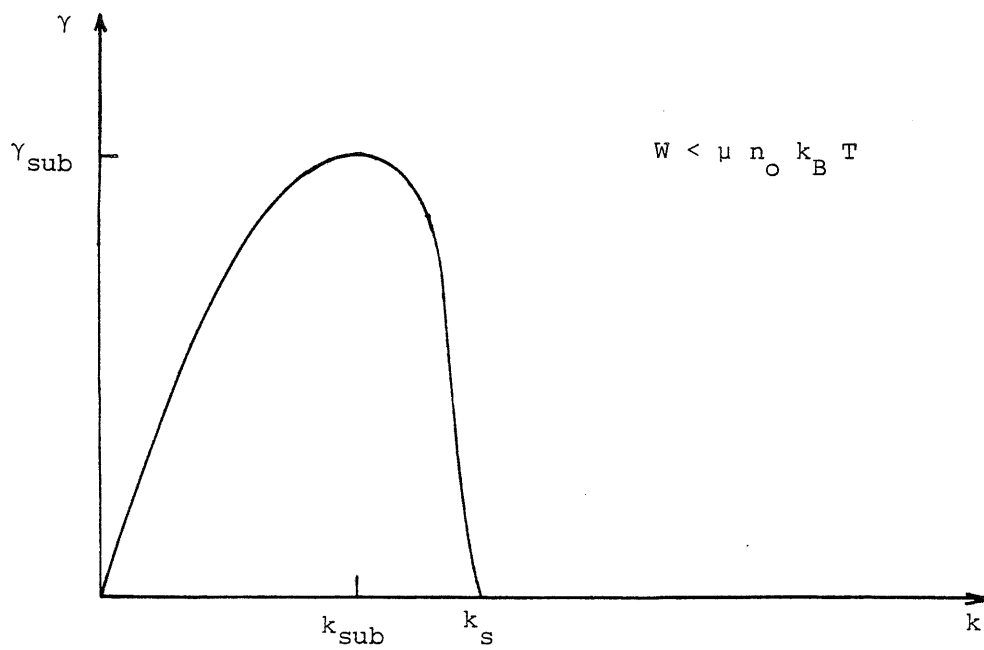


Figure D1 - Taux de croissance γ de l'instabilité automodulationnelle dans le régime subsonique en fonction du nombre d'onde k .

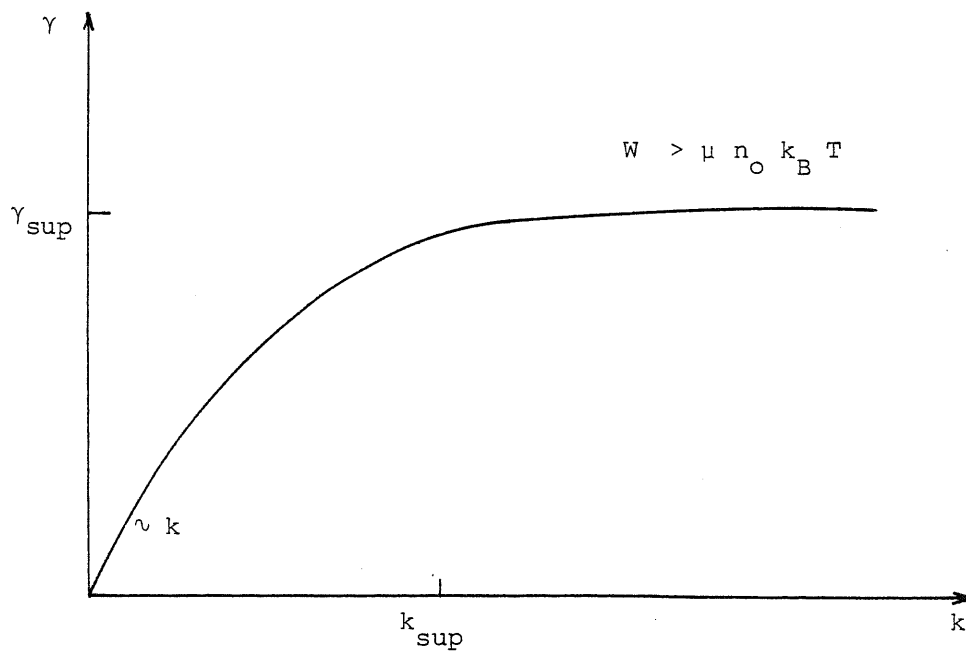


Figure D2 - Taux de croissance γ de l'instabilité automodulationnelle dans le régime supersonique en fonction du nombre d'onde k .

c - Effondrement des cavités

Montrons que, tout comme l'instabilité de Jeans prélude à un effondrement gravitationnel, l'auto-modulation conduit à un effondrement des paquets d'ondes de Langmuir. Etablissons que le système (II.C 46,47) mène à une singularité en un temps fini t_c .

Introduisons la quantité positive :

$$I = \int d\vec{x} |\vec{x}|^2 \rho \quad (\text{II.D 20})$$

où l'intégration porte sur le volume d'une cavité.

Calculons sa dérivée seconde temporelle, il vient à l'aide des équations (II.C 24,41) :

$$\frac{d^2}{dt^2} I = - \int d\vec{x} \rho \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \bar{\rho} + 2 \int d\vec{x} \text{Tr} \vec{T} \quad (\text{II.D 21})$$

où $\text{Tr} \vec{T}$ est la trace du tenseur \vec{T} .

Plaçons-nous dans le cas subsonique, régime où nous avons :

$$\varphi = -\frac{1}{2} \rho \quad \text{et} \quad \vec{v} \simeq \vec{0} \quad (\text{II.D 22})$$

Comparons \mathcal{H} (cf II.C 37) et $\text{Tr} \vec{T}$, l'expression (II.D 21) se réduit à :

$$\frac{d^2}{dt^2} I = 4H + \frac{2-d}{4} \int d\vec{x} \rho^2 \quad (\text{II.D 23})$$

Discutons des conséquences de l'expression ci-dessus en fonction de la dimension d de l'espace.

Supposons qu'initialement nous ayons :

$$\tilde{\rho}^2 = \int d\vec{x} \rho^2 < 4H \quad (\text{II.D 24})$$

cas $d = 1$: En utilisant la conservation de N (cf II.C 31) nous déduisons que $\tilde{\rho}^2$ va croître inversement proportionnellement à la taille d'une cavité ($\sim (\Delta x)^{-1}$). Ce terme va, au cours du temps, compenser le terme négatif $4H$ et un régime stationnaire s'établira ($\frac{d^2}{dt^2} I = 0$). Ce cas ne conduit donc pas à la formation de singularité. Par ailleurs, dans ce cas seulement, une solution analytique exacte peut être exhibée (formation de solitons) (7).

cas $d = 2$: Le terme en $\tilde{\rho}^2$ est nul. Ce cas dépend des conditions initiales, si initialement $H > 0$ nous n'aurons pas de création d'une singularité. Voir $d = 3$ dans le cas contraire.

cas $d = 3$: Nous avons toujours $\frac{d^2}{dt^2} I < 0$. Une intégration de II.D 21 conduit à l'inégalité :

$$I < \frac{1}{2} H t^2 + a t + b \quad (\text{II.D 25})$$

où a et b sont deux constantes positives d'intégration.

Par définition I est une grandeur positive, or (II.D 25) implique que I devient négatif en un temps fini. Cette contradiction permet de déduire la formation d'une singularité en un instant $t = t_c$ (3). Toutefois, physiquement, cet instant t_c n'est jamais atteint, en effet lorsqu'une cavité atteint des tailles de l'ordre de λ_D son énergie ($\sim \rho$) est dissipée par résonance Landau.

Notons aussi que cette analyse n'est valable que pendant les premiers instants du processus. Lorsque la densité ρ , l'intensité des oscillations, atteint des seuils tels que $\rho \sim 1$, la validité du régime subsonique est mise en défaut et le régime devient supersonique.

Raisonnons d'une manière similaire dans ce cas et introduisons la quantité négative ($\varphi < 0$) :

$$I' = \int d\vec{x} |\vec{x}|^2 \varphi \quad (\text{II.D 26})$$

et calculons sa dérivée temporelle seconde en utilisant l'équation (II.D 18), il vient :

$$\frac{d^2}{dt^2} I' = d \int d\vec{x} \rho = d N > 0 \quad (\text{II.D 27})$$

d'où

$$I' = \frac{1}{2} d N t^2 + a' t + b' \quad (\text{II.D 28})$$

a' et b' négatifs.

Nous constatons que la quantité négative I' devient positive en un temps fini. Tout comme précédemment nous déduisons la formation d'une singularité en un instant $t = t'_c$.

E. SOLUTIONS AUTO-SIMILAIRES SUPERSONIQUES

Le régime supersonique étant la phase ultime de l'instabilité d'auto-modulation, cherchons les solutions du système (II.D 20,21).

Introduisons, par analogie à l'hydrodynamique, le nombre de Reynolds \mathcal{R} d'une cavité de taille à dimensionnée $\xi(t) = k_x^{-1} r(t)$.

Nous définirons ce nombre comme le rapport des échelles de temps linéaire $\tau_L \sim (k\lambda_D)^{-2} \omega_p^{-1}$ aux échelles de temps non linéaire τ_{NL} avec $\tau_{NL} \sim (W_{cav}/n_o k_B T)^{-1}$, ω_p , W_{cav} étant la densité d'énergie d'une cavité.

$$\mathcal{R} = \frac{W_{cav}}{(k\lambda_D)^2 n_o k_B T} \quad (\text{II.E 1})$$

\mathcal{R} traduit le rapport de densité d'énergie du champ haute fréquence à la densité d'énergie de compression (17).

Pour un régime supersonique l'équilibre des pressions ne se réalise pas et nous aurons l'inégalité :

$$\mathcal{R} > 1 \quad (\text{II.E 2})$$

Etudions l'auto-modulation dans le cas d'un régime supersonique et distinguons les cas non dissipatif et dissipatif.

a - Cas non dissipatif

Lorsque l'instant t_c de l'effondrement est approché, diverses simulations numériques ont montré un comportement auto-similaire des solutions des équations de Zakharov (3,4). Cherchons des solutions du système (II.D 18,19) sous la forme :

$$\rho = \xi^\alpha h_1(\bar{x}/\xi) \quad \text{et} \quad \varphi = -\xi^\beta h_2(\bar{x}/\xi) \quad (\text{II.E 3})$$

Nous ferons l'hypothèse que le nombre de plasmons N dans une cavité de volume $V \sim \xi^d$ se conserve, c'est-à-dire que le flux J ,

$$J = \int d\vec{s} \cdot \vec{u} \rho \quad (\text{II.E 4})$$

de plasmons à travers la surface S délimitant la cavité est nul, d'où :

$$N = \int d\vec{s} \xi^{d+\alpha} \xi^{-d} h_1(\vec{x}/\xi) = \text{cst} \quad (\text{II.E } 5)$$

Nous déduisons facilement que l'égalité précédente sera vérifiée pour $\alpha = -d$.

La détermination de β s'effectue d'une manière analogue. Intégrons l'équation (II.D 19) dans une cavité, le nombre de plasmons N se conservant, le premier terme de gauche est nul ; appliquons le théorème d'Ostrogradsky et introduisons les solutions auto-similaires, il vient :

$$\int d\vec{s} \xi^{d+\alpha-4} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{T} = \frac{1}{2} \int d\vec{s} \xi^{d+\alpha+\beta-2} \xi^{d-1} h_1(\vec{x}/\xi) \vec{\nabla} h_2(\vec{x}/\xi) \quad (\text{II.E } 6)$$

où les opérateurs $\vec{\nabla}$ sont calculés par rapport à \vec{x}/ξ .

L'équation (II.E 6) implique, pour préserver les solutions auto-similaires, l'égalité des exposants ; d'où $\beta = -2$.

Déterminons à présent une équation d'évolution pour ξ . Injectons les solutions (II.E 5), avec $\alpha = -d$ et $\beta = -2$, dans l'équation d'évolution des perturbations de densité φ (II.E 18). Intégrons le système obtenu dans une cavité, il vient alors pour équation :

$$\xi X(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} X(\xi) - b X(\xi)^2 + c \xi^{-d} = 0 \quad (\text{II.E } 7)$$

où b et c sont des constantes positives fonctions d'intégrales portant sur h_1 et h_2 .

Nous avons défini un taux de transfert $X(\xi)$, tel que :

$$X(\xi) = -\dot{\xi}/\xi \quad (\text{II.E } 8)$$

On vérifie aisément que :

$$X(\xi) = +a \xi^{-\frac{d}{2}} \quad (\text{II.E } 9)$$

est solution de l'équation (II.E 7), a étant une constante.

De (II.E 9) nous déduisons le comportement temporel de ξ , nous obtenons :

$$\xi \sim (t_c - t)^{2/d} \quad (\text{II.E } 10)$$

L'équation (II.E 12) nous permet de donner un ordre de grandeur de l'instant t_c où la singularité se forme ($t_c \gg t$).

$$t_c \sim \xi^{\frac{d}{2}} \quad \text{soit} \quad t_c \sim \gamma_{\text{sup}}^{-1} \quad (\text{II.E 11})$$

Précisons, pour terminer l'étude de ce cas, que nous nous imposerons par la suite la condition de normalisation :

$$\int \frac{d\vec{x}}{\xi^d} h_1(\vec{x}/\xi) = 1 \quad (\text{II.E 12})$$

b - Cas dissipatif

Quand la cavité atteint des dimensions de l'ordre de λ_0 les résultats précédents ne sont plus valables ; en effet à ces échelles l'énergie du champ turbulent langmuirien est absorbée par les particules résonnantes du plasma. Le même phénomène absorbe l'énergie associée aux fluctuations φ de densité, toutefois l'absorption Landau sur ce mode est linéaire en fonction du nombre d'onde k et ne changera donc pas fondamentalement l'évolution de notre système ; nous continuerons alors à prendre $\gamma_s = 0$.

Soit ε le paramètre d'énergie décrivant la dissipation ; nous posons (17) :

$$\rho = \varepsilon \xi^{-d} h_1(\vec{x}/\xi) \quad (\text{II.E 13})$$

Il est clair qu'aux grands nombres d'onde ($\xi \sim 0$) nous aurons $\varepsilon \sim 0$ et $\varepsilon = \varepsilon_*$ constant aux grandes échelles (cas non dissipatif). On peut choisir d'exprimer ε_* en fonction du nombre de Reynolds. Ecrivons celui-ci en fonction de la solution auto-similaire (II.E 15) et à l'aide de (II.E 14), il vient :

$$\mathcal{R}(\xi) \simeq \varepsilon \xi^{2-d} \quad (\text{II.E 14})$$

Pour $\xi = \xi_* = 1$ la dissipation est négligeable, d'où :

$$\varepsilon_* = \mathcal{R}(\xi_*) \equiv \mathcal{R}_* = \frac{3 W_*}{\mu n_0 k_B T} \quad (\text{II.E 15})$$

Examinons les conséquences d'une dissipation non négligeable sur la quantité N .

Dans le cas γ non nul le nombre de plasmons N dans une cavité n'est plus conservé et la discussion a - n'est plus valable.

Considérons l'équation (II.C 2) sur l'enveloppe du champ, multiplions membre à membre par ψ^* et le complexe conjugué de (II.C 2) par ψ , soustrayons les deux quantités, intégrons dans une cavité, il vient dans l'hypothèse d'un flux nul de plasmons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dx \rho = -2 \operatorname{Re} \left\{ \int d\vec{x} \psi^* \hat{\gamma} \psi \right\} \quad (\text{II.E 16})$$

Nous pouvons, à l'aide de l'expression ci-dessus, décrire l'évolution de ε . Injectons la solution (II.E 13), prenons les transformées de Fourier spatiales (en $\exp i\vec{k} \cdot \vec{x} / \xi$) des deux membres de (II.E 16), nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \varepsilon = -2 \gamma(\xi) \varepsilon \quad (\text{II.E 17})$$

Déterminons la modification amenée par la dissipation Landau sur le taux de transfert $\chi(\xi) = -\xi/\xi$. Utilisons la solution auto-similaire (II.E 13) et effectuons le même type de calcul permettant d'exhiber l'équation (II.E 7). Il vient pour équation d'évolution de $\chi(\xi)$:

$$\xi \chi(\xi) \frac{\partial \chi(\xi)}{\partial \xi} - b' \chi^2(\xi) + c' \varepsilon \xi^{-d} = 0 \quad (\text{II.E 18})$$

où les constantes ont la même signification que précédemment.

On vérifie que :

$$\chi(\xi) = +a' \varepsilon^{1/2} \xi^{-d/2} \quad (\text{II.E 19})$$

est solution de (II.E 18).

Notons que cette expression n'est valable que si le terme de compression $\Delta\varphi$ est négligeable (hypothèse supersonique). Si nous en tenons compte, ce qui revient à ajouter le terme $-s\xi^{-2}$ (s étant une constante) au membre de gauche de (II.E 18), nous obtenons pour expression du taux de transfert :

$$\chi(\xi) = +a' \xi^{-\frac{d}{2}} (\varepsilon - \varepsilon_c \xi^{-2+d})^{1/2} \quad (\text{II.E 20})$$

où ε_c est un paramètre d'énergie critique :

$$\varepsilon_c = [a'(1-b)]^{-1/2} s \quad (\text{II.E 21})$$

Bien sûr pour $\epsilon > \epsilon_c \xi^{2-d}$ nous retrouvons (II.E 19).

Si $\epsilon < \epsilon_c \xi^{2-d}$ l'exposé ci-dessus n'a plus de sens, il n'y a pas de formation de cavité.

Remarquons que nous pouvons choisir le paramètre ϵ_c en tenant compte des résultats du paragraphe B. Nous prendrons donc ϵ_c tel que pour $\epsilon < \epsilon_c \xi^{2-d}$ le transfert s'effectue vers les grandes échelles avec formation d'un condensat pouvant déclencher l'auto-modulation (voir II.B).

REFERENCES

- 1 - T.M. O'NEIL - Ecole d'Eté, Cadarache, juillet 1974.
- 2 - B. KADOMTSEV - "Phénomènes collectifs dans les plasmas" - Editions de Moscou - (1979).
- 3 - V.E. ZAKHAROV - Soviet Physics J.E.T.P. 35, 980 (1972).
- 4 - V.E. ZAKHAROV - Soviet Journal of Plasma Physics 4, 339 (1975).
- 5 - E.A. KUZNETSOV - Soviet Physics J.E.T.P. 39, 1003 (1974).
- 6 - V.V. KRANOSSEL'SKIH and al. - Soviet Journal of Plasma Physics 3, 491 (1977).
- 7 - J. GIBSON and al. - J. Plasma Physics 17, 153 (1977).
- 8 - V.N. TSYTOVICH - "Non linear effects in plasmas" - Plenum Press (1970).
- 9 - V.N. TSYTOVICH - "Theory of Turbulent Plasma" - Plenum Press (1977).
- 10 - L. LANDAU - "Physique Statistique - Editions de Moscou (1971).
- 11 - V.E. ZAKHAROV - Soviet Physics J.E.T.P. 54, 1064 (1982).
- 12 - G. PELLETIER - J. Plasma Physics 24, 287 (1980).
- 13 - J.D. JACKSON - "Classical Electrodynamics" - Wiley & Sons (1975).
- 14 - V.E. ZAKHAROV - Soviet Physics J.E.T.P. 33, 927 (1971).
- 15 - J.P. PETIT - Cours de Maîtrise (1980).
- 16 - S. BARDWELL and M.V. GOLDMAN - The Astrophysical Journal 209, 912 (1976).
- 17 - G. PELLETIER - The Physical Review 49, 11, 782 (1982).

C H A P I T R E I I I

THEORIE STATISTIQUE

A. INTRODUCTION

Jusqu'à maintenant nous nous sommes intéressés à la dynamique d'un seul caviton. Cette étude ne nous informe pas sur des quantités physiques accessibles expérimentalement, telles que le spectre d'énergie turbulente $W(k)$ ou la fonction de distribution $f(\vec{v})$ des particules du plasma ; préoccupons-nous de décrire le comportement de ces grandeurs dans le cadre des hypothèses suivantes (1).

- Une injection continue d'énergie (par exemple par un faisceau de particules relativistes) génère, aux grandes échelles, par un mécanisme d'instabilité (dans le cas d'un faisceau par l'instabilité faisceau plasma) des oscillations de Langmuir et cède une puissance Q constante. Lorsque l'intensité W de ces fluctuations satisfait l'inégalité $W/n_o k_B T > (k\lambda_D)^2$ se déclenche, sur une largeur spectrale Δk étendue, l'instabilité d'auto-modulation. Alors se créent localement des cavités ayant une taille initiale aléatoire ξ_o centrée autour du maximum de l'auto-modulation ; par ailleurs, dû au caractère erratique du phénomène, nous pouvons considérer la distribution de ces cavités isotrope.

- Nous nous plaçons à un instant t_o où le régime supersonique a été atteint et où une situation quasi-stationnaire est maintenue : la puissance continûment pompée Q est perdue aux petites échelles par dissipation Landau sur les particules résonnantes du plasma.

- Il existe une zone, dans l'espace des nombres d'onde k , qui transporte sans dissipation l'énergie de la région de production ($\sim k_x$) à la région dissipative ($\sim k_D$). Le transfert d'énergie s'effectue par piégeage des oscillations de Langmuir dans les cavitons en contraction. Par analogie à la turbulence hydrodynamique on convient d'appeler cette région la zone inertielle.

Exploitions ces hypothèses, tout d'abord dans la zone inertielle puis, par la suite, dans la zone dissipative.

B. ZONE INERTIELLE

Définissons une densité $P(\xi)$ en taille des cavités. La quantité $dN(\xi)$:

$$dN(\xi) = P(\xi) d\xi \quad (\text{III.B 1})$$

est le nombre de cavités dont la taille ξ est comprise dans l'intervalle $[\xi, \xi + d\xi]$.

La variation du nombre de cavités $dN(\xi)$, en l'unité de temps, dans cet intervalle est égale à la variation du flux $J(\xi)$:

$$J(\xi) = \xi P(\xi) \quad (\text{III.B 2})$$

entre ξ et $\xi + d\xi$ soit :

$$dN(\xi) = J(\xi + d\xi) - J(\xi) \quad (\text{III.B 3})$$

$$\simeq \frac{\partial}{\partial \xi} [\xi P(\xi)] d\xi \quad (\text{III.B 4})$$

Par ailleurs, la diminution de la quantité de cavités dans ce même intervalle peut s'écrire sous la forme :

$$dN(\xi) = -\frac{\partial}{\partial t} P(\xi) d\xi \quad (\text{III.B 5})$$

Egalons les deux expressions de $dN(\xi)$, nous obtenons l'équation de conservation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} [\xi P(\xi)] = 0 \quad (\text{III.B 6})$$

Soit, en utilisant l'expression (II.E8) :

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} [\chi(\xi) \xi P(\xi)] = 0 \quad (\text{III.B 7})$$

Intéressons-nous à la densité spectrale d'énergie $W(k)$ définie par la relation :

$$W = \int_0^{\infty} dR W(R) \quad (\text{III.B 8})$$

où W est la densité d'énergie des fluctuations de Langmuir.

Remarquons que, en vertu des hypothèses précédemment exposées, nous pouvons écrire que $W(k)dk$ est proportionnel à $dN(\xi)$ soit :

$$W(R) dR \propto P(\xi) d\xi \quad (\text{III.B 9})$$

où la taille ξ d'une cavité est reliée au nombre d'onde par la relation :

$$\xi = \left(\frac{R\xi}{R_*} \right) \frac{R_*}{R} \quad (\text{III.B 10})$$

et où la quantité entre parenthèses est une constante.

Nous déduisons facilement :

$$W(R) \propto P(R_*/R) / R^2 \quad (\text{III.B 11})$$

Il vient pour l'équation d'évolution de la densité spectrale d'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} W(R) + \frac{\partial}{\partial R} [R \nu(R) W(R)] = 0 \quad (\text{III.B 12})$$

où le taux de transfert $\nu(k)$ a pour expression :

$$\nu(R) = \chi(R_*/R) \left(\frac{R\xi}{R_*} \right)^{-\frac{d}{2}} \quad (\text{III.B 13})$$

Lorsqu'un régime quasi-stationnaire est établi, la solution de l'équation (II.B 12) se trouve aisément :

$$W(R) \propto [R \nu(R)]^{-1} \propto R^{-1-\frac{d}{2}} \quad (\text{III.B 14})$$

De la condition de raccordement du spectre aux grandes échelles, nous choisisons k_x , nous obtenons pour expression de la densité spectrale d'énergie la loi de puissance :

$$W(k) = W(k_*) \left(\frac{k}{k_*} \right)^{-1-\frac{d}{2}} \quad (\text{III.B 15})$$

De la même manière il vient pour $v(k)$:

$$v(k) = v(k_*) \left(\frac{k}{k_*} \right)^{\frac{d}{2}} \quad (\text{III.B 16})$$

C. ZONE DISSIPATIVE

Lorsque la dissipation Landau $\gamma_L(k)$ n'est plus négligeable face au taux de transfert inertiel, l'étude précédente n'est plus valable.

Notons k_m le nombre d'onde à partir duquel $\gamma_L(k)$ et $v(k)$ sont en compétition, étudions les modifications apportées au spectre $W(k)$ et à la fonction de distribution de particules $f(v)$ pour et au-delà de k_m , cette région constituant la zone dissipative. De par la nature aléatoire du processus de formation des cavités nous devons raisonner d'un point de vue statistique.

Donnons-nous une densité de probabilité $P(\xi, \epsilon)$ avec la condition de normalisation :

$$\iint d\xi d\epsilon P(\xi, \epsilon) = 1 \quad (\text{III.C 1})$$

et où :

$$d\mathcal{P} = p(\xi, \epsilon) d\xi d\epsilon \quad (\text{III.C 2})$$

représente la probabilité de trouver les variables aléatoires indépendantes de ξ et de ϵ dans les intervalles respectifs $|\xi, \xi+d\xi|$ et $|\epsilon, \epsilon+d\epsilon|$. Les résultats de la mécanique statistique permettent d'affirmer que $P(\xi, \epsilon)$ vérifie l'équation de conservation du fluide de probabilité ou équation de Liouville (2).

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\xi, \epsilon) + \frac{\partial}{\partial \xi} [\dot{\xi} P(\xi, \epsilon)] + \frac{\partial}{\partial \epsilon} [\dot{\epsilon} P(\xi, \epsilon)] = 0 \quad (\text{III.C 3})$$

où $\dot{\xi}$ et $\dot{\epsilon}$ sont donnés respectivement par les équations et (II.E8 ,17).

Déterminons la forme analytique de $P(\xi, \epsilon)$. Il est clair que dans l'espace des phases les variables ϵ et ξ suivent une certaine trajectoire dépendant du temps t et des conditions initiales ϵ_0 et ξ_0 , c'est-à-dire :

$$\varepsilon = \varepsilon(t, \xi_0, \varepsilon_0)$$

(III.C 4)

$$\xi = \xi(t, \xi_0, \varepsilon_0)$$

Par ailleurs, nous avons précisé que la formation aux grandes échelles des cavités présentait un caractère aléatoire ; nous tiendrons compte de cette propriété en introduisant une densité de probabilité $P(\varepsilon_0, \xi_0)$ sur les conditions initiales avec :

$$\iint d\xi_0 d\varepsilon_0 P(\xi_0, \varepsilon_0) = 1 \quad (\text{III.C 5})$$

Nous pouvons alors, en procédant d'une manière analogue à Klimontovich (3), choisir $P(\varepsilon, \xi)$ comme suit :

$$P(\xi, \varepsilon) = \iint d\xi_0 d\varepsilon_0 P(\varepsilon_0, \xi_0) \delta[\xi - \xi(t, \varepsilon_0, \xi_0)] \delta[\varepsilon - \varepsilon(t, \varepsilon_0, \xi_0)] \quad (\text{III.C 6})$$

Sous la forme ci-dessus $P(\xi, \varepsilon)$ est écrite sous sa forme la plus générale, simplifions cette expression et pour ce faire remarquons les deux points suivants :

- Initialement toutes cavités de taille ξ_0 contient la même énergie ε_0 , il existe donc une relation du type $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\xi_0)$; de plus, de ce qui a été dit en fin de chapitre II, nous pouvons définir ξ_0 comme la taille correspondant à $\varepsilon = \varepsilon_c$. Les relations (II.C 4) peuvent se réécrire :

$$\xi(t, \varepsilon_0, \xi_0) = \xi_0(t, \xi_0)$$

$$\varepsilon(t, \varepsilon_0, \xi_0) = \varepsilon'(\xi_0)$$

(III.C 7)

et

$$P(\xi_0, \varepsilon_0) = P_0(\xi_0)$$

- Considérons les équations (II.E 23) et (II.E 19), par invariance temporelle nous pouvons écrire :

$$\frac{d\varepsilon}{2\varepsilon\gamma(\xi)} = \frac{d\xi}{\xi X(\xi, \varepsilon)} \quad (\text{III.C 8})$$

ce qui implique une relation $\varepsilon = \varepsilon(\xi)$. Précisons que l'équation (II.E 22), dans l'hypothèse légitime d'une faible correction du terme de transfert vers les petits nombres d'onde, s'intègre sans difficulté, il vient :

$$\varepsilon^{1/2}(\xi) = \varepsilon^{1/2}(\xi_0) + a^{-1} \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi \gamma(\xi) \xi^{\frac{d}{2}-1} \quad (\text{III.C 9})$$

Ainsi la variable aléatoire ε ne dépend pas explicitement du temps t et nous avons la relation :

$$\varepsilon'(t, \xi_0) = \varepsilon_0(\xi, \xi_0)$$

D'après les deux remarques précédentes la densité de probabilité $P(\xi, \varepsilon)$ s'écrit :

$$P(\xi, \varepsilon) = P_1(\xi) \int d\xi_0 P_0(\xi_0) \delta[\varepsilon - \varepsilon_0(\xi, \xi_0)] \quad (\text{III.C 10})$$

où nous avons défini la densité de probabilité $P_1(\xi)$ telle que :

$$\int d\varepsilon P(\xi, \varepsilon) = P_1(\xi) \quad (\text{III.C 11})$$

c'est-à-dire :

$$P_1(\xi) = \int d\xi_0 P_0(\xi_0) \delta[\xi - \xi(t, \xi_0)] \quad (\text{III.C 12})$$

L'équation d'évolution de $P_1(\xi)$ se déduit aisément de l'équation (III.C 3) en intégrant sur la variable ε , il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} P_1(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} [\xi \chi_1(\xi) P_1(\xi)] \quad (\text{III.C 13})$$

où nous avons utilisé les équations (III.C 10) et (III.C 11) ; nous avons posé :

$$\chi_1(\xi) = \int d\xi_0 P_0(\xi_0) \chi(\xi, \varepsilon_0(\xi, \xi_0)) \quad (\text{III.C 14})$$

Muni des expressions précédentes, déterminons l'équation d'évolution de la densité spectrale d'énergie turbulente $W(k)$, nous posons :

$$\frac{W(k)}{\mu n_0 k_b T} = n_{cav} \iint d\xi d\varepsilon \varepsilon P(\xi, \varepsilon) \xi g(k\xi) \quad (\text{III.C 15})$$

où n_{cav} est la densité moyenne des cavités, $\xi g(k\xi)$ est la densité spectrale d'énergie, en l'absence de dissipation, dans une cavité.

Utilisons le théorème de parseval, il vient :

$$\int d\vec{x} \xi^{-d} h_1(\vec{x}/\xi) = \int d\vec{k} \xi g(k\xi) = 1 \quad (\text{III.C 16})$$

Remarquons que nous pouvons écrire l'expression (II.C 15) sous la forme :

$$\frac{W(k)}{\mu n_0 k_B T} = n_{\text{cav}} \int d\xi \xi g(k\xi) \Gamma(\xi) \quad (\text{III.C 17})$$

où :

$$\Gamma(\xi) = P_1(\xi) \int d\xi_0 P_0(\xi_0) \varepsilon_0(\xi, \xi_0) \quad (\text{III.C 18})$$

Déterminons l'évolution de la densité spectrale d'énergie $W(k)$, ce qui revient à chercher l'évolution de $\Gamma(\xi)$; dérivons par rapport au temps et membre à membre l'expression (II.C 18) d'où, en se souvenant que ξ , ε et t sont, d'un point de vue statistique, des variables indépendantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\xi) = \int d\varepsilon \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} [\xi X(\xi, \varepsilon) P(\xi, \varepsilon)] + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [\varepsilon \gamma(\xi) \varepsilon P(\xi, \varepsilon)] \right\} \quad (\text{III.C 19})$$

posons :

$$\chi_2(\xi) = \frac{\int d\xi_0 \varepsilon_0(\xi, \xi_0) X(\xi, \varepsilon_0(\xi, \xi_0)) P_0(\xi_0)}{\int d\xi_0 \varepsilon_0(\xi, \xi_0) P_0(\xi_0)} \quad (\text{III.C 20})$$

Considérons l'expression ci-dessus. Remarquons que l'intégration sur la variable ξ_0 s'effectue sur les cavités de grandes tailles telles que $\xi_0 \gg \xi$, par ailleurs ξ_0 est centrée autour du maximum de l'instabilité d'automodulation $\xi_0 \propto k_{\text{sup}}^{-1}$; appliquons alors le théorème de la moyenne (voir appendice A) à $\varepsilon_0(\xi, \xi_0)$ et pour la variable $\xi_0 = \bar{\xi}_0$, il vient pour $\chi_2(\xi)$:

$$\chi_2(\xi) = \chi(\xi, \varepsilon(\xi)) \quad (\text{III.C 21})$$

où nous avons posé :

$$\varepsilon(\xi) = \varepsilon_0(\xi, \bar{\xi}_0) \quad (\text{III.C 22})$$

Appliquons de même le théorème de la moyenne à l'expression (III.C 14), il vient en raisonnant identiquement :

$$\chi_1(\xi) = \chi(\xi, \varepsilon(\xi)) \quad (\text{III.C 23})$$

L'équation (III.C 19) se réécrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} [\xi \chi(\xi, \varepsilon(\xi)) \Gamma(\xi)] - 2 \gamma(\xi) \Gamma(\xi) \quad (\text{III.C 24})$$

Nous pouvons aussi décrire l'équation d'évolution de $W(k)$. Considérons l'expression (III.C 15), raisonnons de la même manière que pour la dérivation de l'équation (III.C 19), posons $u = k\xi$, il vient pour équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} W(k) = - \frac{\partial}{\partial k} [k \nu(k) W(k)] - 2 \gamma(k) W(k) \quad (\text{III.C 25})$$

où nous avons pour expression du taux de transfert $\nu(k)$:

$$\nu(k) = \langle \chi(u/k, \varepsilon) \rangle = \frac{\iint d\varepsilon du g(u) u \varepsilon \chi(u/k, \varepsilon) P(u/k, \varepsilon)}{\iint d\varepsilon du g(u) u \varepsilon P(u/k, \varepsilon)} \quad (\text{III.C 26})$$

Cette expression peut se réécrire plus simplement en tenant compte de l'expression de $p(\xi, \varepsilon)$ et en appliquant le théorème de la moyenne (sous la forme précisée dans l'appendice), nous obtenons :

$$\nu(k) = \chi(u_0/k, \varepsilon(u_0/k)) \quad (\text{III.C 27})$$

Nous constatons que l'équation de la densité spectrale des fluctuations du champ de Langmuir met en compétition deux effets. Un terme différentiel, modélisant un transfert d'énergie vers les échelles dissipatives, qui est caractérisé par un taux de transfert $\nu(k)$, ainsi qu'un terme dissipatif, modélisé par $\gamma(k)$, qui traduit la dissipation Landau aux petites échelles. $\gamma(k)$ dépend de la forme de la fonction de distribution des particules.

Notons que nous pouvons ajouter un terme de source $Q(k)$ au membre de droite de (III.C 25). $Q(k)$ modélisera une densité de puissance spectrale excitatrice.

D. EQUATION POUR LA FONCTION DE DISTRIBUTION $f(v)$ DES PARTICULES

A la condition de résonance Cerenkov ($\omega_k = \vec{k} \cdot \vec{v}$) le champ fluctuant est absorbé par les particules résonnantes du plasma ; ce mécanisme est décrit par le coefficient d'absorption de Landau qui s'écrit :

$$\gamma(\vec{k}) = -\frac{1}{2m_e} \int_{\mathbb{R}^d} d\vec{v} \, u(\vec{k}, \vec{v}) \, \hbar \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{v} \frac{\partial}{\partial v} f(v) \quad (\text{III.D 1})$$

et où

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\vec{v} \, f(\vec{v}) = 1 \quad (\text{III.D 2})$$

$u(\vec{k}, \vec{v})$ est le taux d'émission du mode de Langmuir avec (3) :

$$u(\vec{k}, \vec{v}) = \pi \frac{m_e}{\hbar} \frac{\omega_{pe}^3}{k^2} \delta(\omega_{pe} - \vec{k} \cdot \vec{v}) \quad (\text{III.D 3})$$

Sachant que dans un état turbulent le principal phénomène est la diffusion des particules du plasma par le champ fluctuant (3), nous pouvons adopter pour équation d'évolution de $f(v)$ l'équation de la théorie quasi-linéaire classique qui, dans le cas isotrope s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v) = \frac{1}{v^{d-1}} \frac{\partial}{\partial v} v^{d-1} D(v) \frac{\partial}{\partial v} f(v). \quad (\text{III.D. 4})$$

où $D(v)$, coefficient de diffusion dans l'espace des vitesses, s'écrit :

$$D(v) = \hbar^2 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} N(\vec{k}) U(\vec{k}, \vec{v}) \frac{(\vec{k} \cdot \vec{v})^2}{v^2} \quad (\text{III.D } 5)$$

où $N(\vec{k})$ est le nombre d'occupations, pour les plasmons, des états de vecteurs d'ondes \vec{k} , notons que dans le cas isotrope $W(k) \propto k^{d-1} N(k)$.

Nous disposons, connaissant l'équation spectrale (II.C 25), l'équation quasi-linéaire de $f(v)$ (III.D 4) et les expressions associées, d'un système décrivant la dissipation du champ turbulent haute fréquence de Langmuir et la génération de particules non thermiques.

Exploitions ces équations et recherchons des solutions lorsqu'un état quasi-stationnaire est atteint.

E. RECHERCHE DE SOLUTIONS QUASI-STATIONNAIRES DISSIPATIVES

Nous supposons que l'absorption résonnante s'effectue dans la gamme des petites échelles définies par $k_m(t) < k < k_M(t)$.

L'énergie ainsi acquise par les particules, dont la vitesse vérifie l'égalité $v = \omega_{pe}/k$, leur permet d'atteindre des vitesses non thermiques comprises dans l'intervalle $\omega_{pe}/k_M(t) < v < \omega_{pe}/k_m(t)$. (Voir figures III.1,2)

Il y a formation d'une queue de particules suprathermiques pouvant atteindre des vitesses relativistes. D'autre part, la formation de cette queue de particules augmente le nombre de particules résonnantes, la zone dissipative va peu à peu gagner sur la zone inertielle, celle-ci tendant à disparaître.

Dans le but de décrire cette dynamique cherchons une solution quasi-stationnaire des équations précédentes sur la base d'un flux constant de particules aux grandes vitesses, c'est-à-dire :

$$v^{d-1} D(v) \frac{\partial}{\partial v} f(v) = \text{cst} \quad \text{pour} \quad v_m(t) < v < v_n(t) \quad (\text{III.E } 1)$$

Cherchons des solutions en loi de puissance du type :

$$f(v) = A(t) v^{-\eta} \quad \text{pour} \quad v_m(t) < v < v_n(t) \quad (\text{III.E } 2)$$

$$W(k) = B(t) k^{-\alpha} \quad \text{pour} \quad k_m(t) < k < k_n(t) \quad (\text{III.E } 3)$$

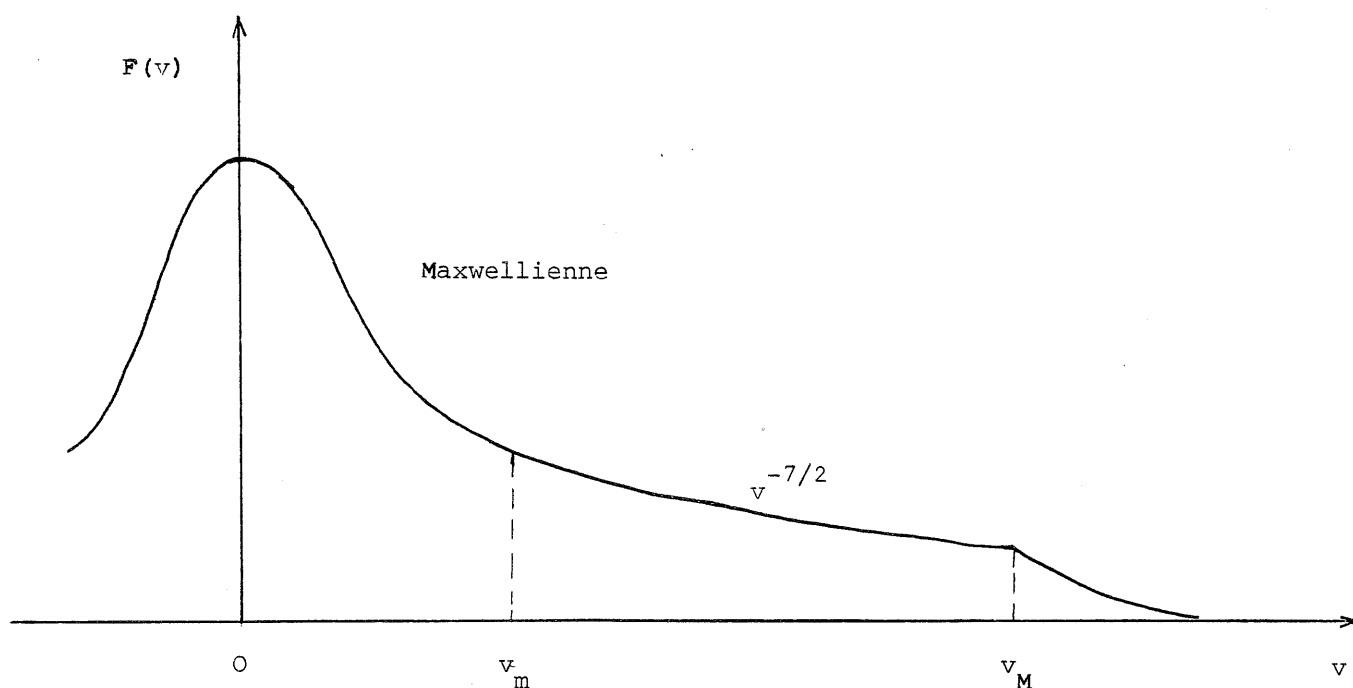


Figure III.1 - Fonction de distribution $f(v)$ des particules pour $d = 3$.

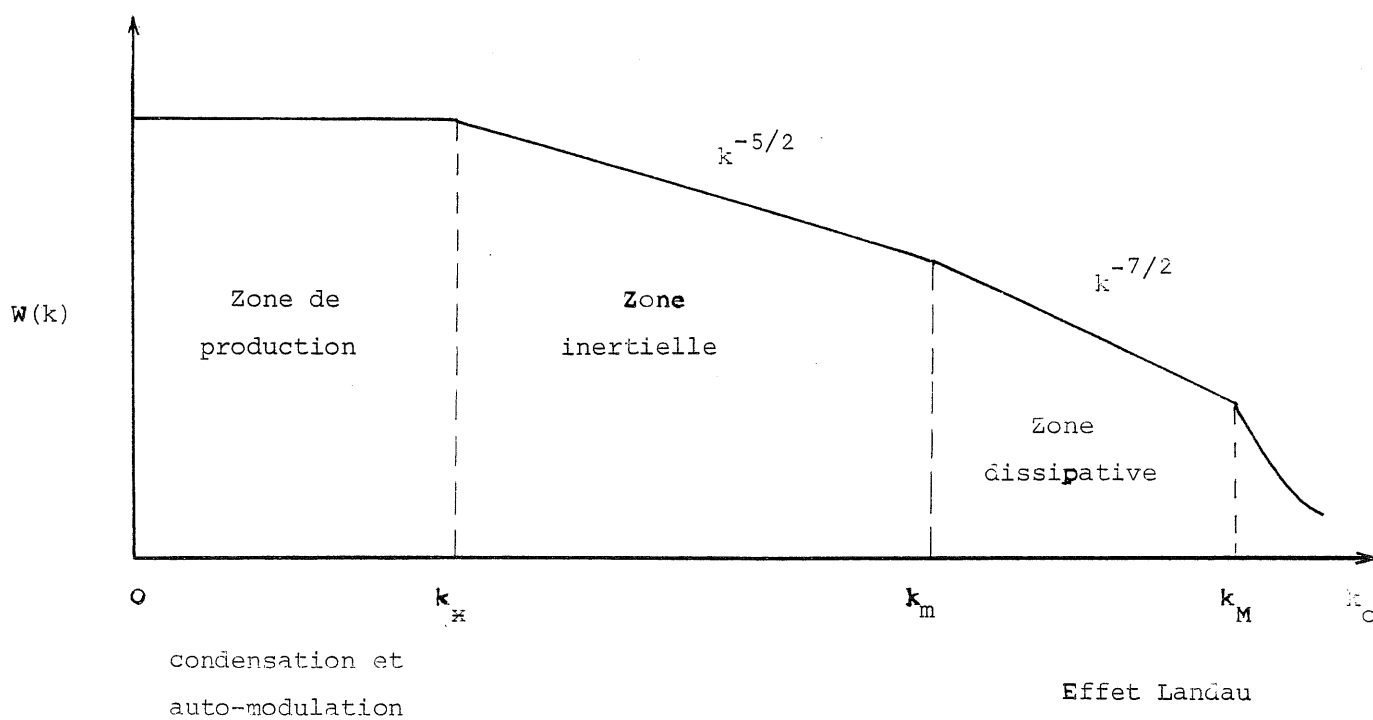


Figure III.2 - Spectre $W(k)$ des ondes de Langmuir pour $d = 3$.

Au-delà de k_m l'absorption Landau détruit les lois de puissance.

Utilisons d'abord les équations spectrales.

D'après l'équation (III.C 13) nous avons :

$$P_1(\xi) \propto [\xi \chi(\xi, \varepsilon(\xi))]^{-1} \propto \xi^{\frac{d}{2}-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\xi) \quad (\text{III.E 4})$$

où la dernière proportionnalité est justifiée dans l'approximation $\varepsilon > \varepsilon_0 \xi^{-2+d}$; par ailleurs dans cette hypothèse nous avons la loi de proportionnalité :

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\xi) \propto \xi^{\frac{3d}{2}-\eta} \propto k^{\eta-\frac{3d}{2}} \quad (\text{III.E 5})$$

où nous avons posé, d'après l'expression générale de $\gamma(k)$:

$$\gamma(k) = a k^{\eta-d} \quad (\text{III.E 6})$$

or :

$$W(k) \propto \int d\xi g(k\xi) \xi P_1(\xi) \varepsilon \quad (\text{III.E 7})$$

D'où, en utilisant les lois de proportionnalité précédentes :

$$W(k) \propto k^{\eta-2d-1} \quad (\text{III.E 8})$$

Par ailleurs, dans un état quasi-stationnaire nous avons nécessairement :

$$\frac{\partial}{\partial k} k v(k) W(k) = -2 \gamma(k) W(k) \quad (\text{III.E 9})$$

D'après l'expression (III.C 26) de $v(k)$, nous avons $v(k) = b k^{\eta-d}$, l'égalité ci-dessus implique alors :

$$\frac{a}{b} = -2\eta + 3d \quad (\text{III.E 10})$$

Examinons la condition d'un flux constant de particules. D'après l'expression générale de $D(v)$ nous avons la loi de proportionnalité $D(v) \propto v^{\alpha-1}$. L'expression (III.E 1) implique alors l'égalité :

$$d + \alpha - \eta - 3 = 0 \quad (\text{III.E 11})$$

soit, en comparant (III.E 3) et (III.E 8) :

$$\eta = \frac{3d}{2} - 1 \quad (\text{III.E 12})$$

Immédiatement nous obtenons :

$$\alpha = \frac{d}{2} + 2, \quad a = b, \quad \varepsilon^{1/2} \propto k^{-1} \quad (\text{III.E 13})$$

En conclusion de ce paragraphe nous dirons que les uniques solutions en loi de puissance sont de la forme :

$$f(v) \propto v^{-\frac{3d}{2}+1} \quad \text{et} \quad W(k) \propto k^{-\frac{d}{2}-2} \quad (\text{III.E 14})$$

De plus, dans cette région nous avons $\gamma(k) = v(k) \propto k^{d/2-1}$, nous constatons que l'indice spectral est plus fort que dans la zone inertielle, le spectre est plus pentu.

Nous pouvons confirmer ces résultats en intégrant directement l'équation (III.C 3) dans le cas stationnaire (voir appendice B), nous obtenons :

$$P(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \xi^{\frac{d}{2}-1} \varphi(I)$$

où φ est une fonction de l'invariant I.

Si nous injectons cette solution directement dans l'expression de $W(k)$ il vient les solutions ci-dessus.

F. CARACTERISTIQUES DE LA QUEUE DE PARTICULES RESONNANTES

Intéressons-nous aux propriétés physiques de la queue de particules résonnantes, pour cela étudions le cas le plus réaliste $d = 3$.

Remarquons que, dans ce cas, nous avons, d'après les expressions générales de $D(v)$ et $\gamma(k)$ (voir appendice C) :

$$\gamma(k) = \pi^2 \left[v^3 f(v) \right]_{v=\frac{\omega_{pe}}{k}} \omega_{pe} \quad \text{et} \quad D(v) = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pe}^4}{n_0 m_e} v^{-3} \int_{k \geq \frac{\omega_{pe}}{v}} dk \frac{W(k)}{k^3} \quad \text{(III.F 1)} \quad \text{(III.F 2)}$$

Proposons-nous d'estimer le comportement temporel asymptotique des nombres d'ondes $k_m(t) = \omega_{pe}/v_m(t)$, $k_M(t) = \omega_{pe}/v_M(t)$ et de la densité de particules résonnantes $n_R(t)$ que nous posons, par définition, égale à :

$$n_R(t) = n_0 \int_{k_m(t)}^{k_M(t)} dv f(v) \quad \text{(III.F 3)}$$

Précisons que par asymptotique nous entendons des temps t tels que $v_M(t) \gg v_m(t)$.

S'il est clair que le nombre d'onde k_m est tel que la dissipation commence à compenser le transfert ($\gamma(k_m) \sim v(k_m)$) nous n'avons pas justifié l'existence d'un nombre d'onde k_M au delà duquel les lois de puissances sont détruites. Nous savons (voir début du chapitre II) que la condition de "vie" des cavités est que la pression du champ haute fréquence domine la pression thermique, ce qui nous avons traduit par la condition $\mathcal{R} > 1$. Si nous remarquons, qu'aux petites tailles, l'absorption résonnante et l'émission d'ondes sonores (voir chapitre II) contribuent à vider les cavités de leur énergie, il arrivera que pour des dimensions de cavités correspondant à un nombre d'onde supérieur à k_M , où k_M est tel que :

$$\mathcal{R}(k_M) = 1 \quad \text{(III.F 4)}$$

il n'y aura plus d'équilibre des pressions et les cavités seront alors détruites ; il s'en suit une rupture brutale de pente du spectre au delà de k_M . Notons que ce

phénomène de disparition soudaine des cavités est supporté par des simulations numériques (4).

Exploitions la relation (II.E14) ; d'après (III.E 13) nous avons :

$$\varepsilon = \varepsilon_* \left(\frac{k_m}{k} \right)^2 = \mathcal{R}_* \left(\frac{k_m}{k} \right)^2 \quad (\text{III.F 5})$$

Le nombre de Reynolds peut s'écrire, dans la zone dissipative, sous la forme :

$$\mathcal{R}(k) = \mathcal{R}_* \left(\frac{k_m}{k} \right)^{4-d} \left(\frac{k_m}{k_*} \right)^{d-2} \quad (\text{III.F 6})$$

L'égalité (II.F 4) impose alors :

$$k_n(t) = k_m(t) \mathcal{R}_*^{\frac{1}{4-d}} \left(\frac{k_m(t)}{k_*} \right)^{\frac{2-d}{d-4}} \quad (\text{III.F 7})$$

soit, pour $d = 3$:

$$k_n(t) = k_*^{-1} \mathcal{R}_* k_m^2(t) \quad (\text{III.F 8})$$

Ainsi, nous avons relié $k_M(t)$ et $k_m(t)$, nous utiliserons plus loin cette relation.

D'autre part, il est intéressant de relier la densité de puissance injectée Q à la densité d'énergie turbulente à W_* ; faisons l'hypothèse que, par auto-modulation, la densité de puissance est transportée à k_* , nous pouvons écrire :

$$Q \simeq \int_0^{k_*} dk \frac{\partial}{\partial k} [k \nu(k) W(k)] = \nu(k_*) k_* W(k_*) \simeq \nu(k_*) W_* \quad (\text{III.F 9})$$

où la dernière égalité résulte de l'approximation d'un spectre doux et où $\nu(k_*) = \gamma_{\text{sup}}$, γ_{sup} étant donné par (II.D17). Moyennant ces hypothèses il vient :

$$W_* = \mu n_0 k_B T \bar{Q}^{2/3} \quad (\text{III.F 10})$$

où, par commodité d'écriture, nous avons posé :

$$\bar{Q} = \frac{Q}{\mu^2 \omega_{pe} n_0 k_B T} \quad (\text{III.F 11})$$

Il sera aussi pratique d'écrire nos résultats en fonction de \mathcal{R}_* , de la définition de \mathcal{R}_* et d'après (III.F 10), \bar{Q} s'exprime en fonction du nombre de Reynolds à l'aide de l'expression ci-dessous :

$$\bar{Q} = \frac{1}{3} \mathcal{R}_*^{3/2} \quad (\text{III.F 12})$$

Intéressons-nous à présent à la densité de particules résonnantes $n_R(t)$. Explicitons (III.F 3), il vient avec $f(v) = A(t) v^{-7/2}$ et sous l'hypothèse d'isotropie :

$$n_R(t) = 8\pi n_0 A(t) \left[v_m^{-1/2}(t) - v_n^{-1/2}(t) \right] \quad (\text{III.F 13})$$

Il est clair que pour t grand nous aurons :

$$n_R(t) = 8\pi n_0 A(t) v_m^{-1/2}(t) \quad (\text{III.F 14})$$

De plus, d'après les conditions de résonance et d'après (III.F 8) nous pouvons indifféremment exprimer $v_m(t)$ en fonction de $k_M(t)$, $k_m(t)$ ou $v_M(t)$. Le problème que nous nous sommes posé sera alors résolu si nous exhibons deux équations liant $A(t)$ et $k_m(t)$ ou $k_M(t)$ ou $v_M(t)$. Raisonnons pour ce faire comme suit :

Ecrivons que la densité de puissance Q , constante, de la pompe est donnée, à la résonance Landau, aux particules de la queue sous la forme de densité de puissance cinétique soit :

$$Q = \frac{dW_R}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} n_0 m_e \int_{v_m(t)}^{v_n(t)} d\vec{v} v^2 f(\vec{v}) \right\} \quad (\text{III.F 15})$$

Sous les mêmes hypothèses que précédemment et avec $W_R = Qt$, égalité que nous pouvons réécrire sous la forme :

$$\frac{W_R}{W_*} = \nu_* t \quad (\text{III.F 16})$$

nous obtenons, pour l'expression (III.F 15) :

$$\left[v_n^{3/2}(t) - v_m^{3/2}(t) \right] A(t) = \frac{\mu}{4\pi} \mathcal{R}_* (v_* t) v_{Te}^2 \quad (\text{III.F 17})$$

où v_* a le sens habituel, c'est-à-dire en explicitant :

$$v_* = \left[\frac{1}{3} \mathcal{R}_* \right]^{1/2} \mu \omega_{pe} \quad (\text{III.F 18})$$

Asymptotiquement nous pouvons écrire :

$$v_n^{3/2}(t) A(t) = \frac{\mu}{4\pi} \mathcal{R}_* (v_* t) v_{Te}^2 \quad (\text{III.F 19})$$

ce qui constitue une première équation.

Par ailleurs nous savons (voir paragraphe III.E) que dans la zone dissipative et lorsque les lois de puissance sont établies, nous avons :

$$\gamma(k) \simeq \nu(k) \quad (\text{III.F 20})$$

Ce qui implique, en utilisant la formule (III.F 1) donnant $\gamma(k)$ et avec $\nu(k) = \nu(k_m) (k/k_m)^{1/2}$ et où, de la condition de raccordement à k_* , $\nu(k_m) = \nu(k_*) (k_m/k_*)^{3/2}$, pour expression de $A(t)$:

$$A(t) = \pi^{-2} (3\mu)^{1/4} \mathcal{R}_*^{1/2} \frac{v_{Te}}{v_m} v_{Te}^{1/2} \quad (\text{III.F 21})$$

Notons que nous pouvons retrouver la relation (III.F 21) indépendamment de l'hypothèse (III.F 20) ; en effet, écrivons que la densité de puissance Q est perdue par résonance Landau, soit :

$$Q = 2 \int_{k_m}^{k_M} dk \gamma(k) W(k) \quad (\text{III.F 22})$$

Explicitons $B(t)$ tel que $W(k) = B(t) k^{-7/2}$. De la condition de raccordement à $k_m(t)$ nous avons $W(k) = W(k_m) (k/k_m)^{-7/2}$, de la condition de continuité à k_* nous obtenons $W(k_m) = W(k_*) (k_m/k_*)^{-5/2}$, $B(t)$ se déduit simplement par identification, il vient en réarrangeant les termes :

$$B(t) = \left(\frac{\mu}{3} \right)^{1/2} \mathcal{R}_* \frac{v_{Te}}{v_m} n_0 k_B T k_*^{5/2} \quad (\text{III.F 23})$$

Si nous réécrivons (III.F 22) en développant les divers termes et en utilisant (II.F 23) nous retrouvons asymptotiquement l'expression (III.F 21) confirmant ainsi la justesse de l'hypothèse (III.F 20).

Ayant établi l'expression (III.F 21) de $A(t)$ nous sommes alors en mesure de déterminer l'évolution temporelle de $v_M(t)$, il vient d'après (III.F 19) :

$$v_n(t) = \left(\frac{t}{t_M}\right)^2 v_{Te} \quad (\text{III.F 24})$$

où le temps d'évolution caractéristique t_M de la vitesse maximale $v_M(t)$ de la queue s'écrit :

$$t_M = c \mathcal{R}_*^{-1/2} \nu_*^{-1} \quad (\text{III.F 25})$$

$$\text{où } c = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1} 3^{1/4} \mu^{-3/4} \simeq 1 \cdot 10^3$$

Connaissant la dépendance temporelle de $v_M(t)$ (ou $k_m(t)$), nous déduisons, d'après (III.F 8), pour équation d'évolution de $v_m(t)$ (ou $k_M(t)$) :

$$v_m(t) = c' \left(\frac{t}{t_M}\right)^4 \mathcal{R}_*^{-1} v_{Te} \quad (\text{III.F 26})$$

$$\text{où } c' = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/2} \simeq 8 \cdot 10^{-3}$$

La densité de particules résonnantes $n_R(t)$ s'exprime alors facilement, il vient en utilisant les expressions (III.F 24) et (III.F 21) :

$$n_R(t) = b \mathcal{R}_* \left(\frac{t_M}{t}\right)^4 n_0 \quad (\text{III.F 27})$$

$$\text{où } b = \frac{8}{\pi} (3\mu)^{1/2} \simeq 6 \cdot 10^{-2}$$

Ainsi cette densité de particules résonnantes décroît au cours du temps en t^{-4} .

Bien entendu cette analyse sera valable tant que nous pourrons négliger la contribution des particules dans la queue à la relation de dispersion des ondes de Langmuir, cette condition implique que la densité d'énergie dans

les particules dans la queue est petite face à la densité d'énergie dans la partie thermique de la fonction de distribution des particules, soit :

$$W_R \ll n_0 R_B T \quad (\text{III.F 28})$$

Cette inégalité peut se réécrire sous la forme :

$$t \ll t_F \quad (\text{III.F 29})$$

où le temps limite de validité t_F de la théorie ci-dessus a pour expression :

$$t_F = c R_*^{-1} \nu_*^{-1} \quad (\text{III.F 30})$$

où $c = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{-1} \simeq 1,6 \cdot 10^4$

Notons que dans le cas où l'inégalité (III.F 28) ne serait plus assurée il faudrait utiliser un couple d'équations de Zakharov où l'effet des particules dans la queue serait pris en compte (5).

Estimons le rapport t_F/t_M . Des relations (III.F 25,30) nous déduisons :

$$\frac{t_F}{t_M} \simeq 15 R_*^{-1} \quad (\text{III.F 31})$$

Ce rapport est de l'ordre de l'unité.

De la condition d'existence d'un régime séculaire, $t_M < t_F$, nous pouvons estimer qualitativement une borne supérieure de la valeur du nombre de Reynolds R_* , nous obtenons :

$$R_* < R_c = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 3^{3/2} \mu^{-1/2} \simeq 2,4 \cdot 10^2 \quad (\text{III.F 32})$$

Ainsi le comportement en loi de puissance des grandeurs que nous venons de décrire ne pourra être observé qu'au bout d'un temps de l'ordre de t_M et pendant un intervalle de temps relativement court $\Delta t \simeq t_F - t_M$.

Remarquons aussi qu'à l'instant t_M la densité de puissance cinétique $W_R(t)$ dans la queue de particules résonnantes est proche de la saturation, au sens décrit par l'inégalité (III.F 28), en effet il vient en utilisant l'expression (III.F 16) :

$$W_R(t_M) = c R_*^{1/2} n_0 R_B T \quad (\text{III.F 33})$$

$$\text{où } c = \frac{4}{\pi} 3^{-3/2} \mu^{1/4} \simeq 6,4 \cdot 10^2$$

Nous constatons que pour $1 \ll \mathcal{R}_x < \mathcal{R}_c$ le rapport $W_R(t_M)/n_0 k_B T$ est de l'ordre de 10^{-1} , $W_R(t_M)$ est donc déjà important, ce qui laisse supposer que l'essentiel de la queue est déjà développé à t_M . Les diverses quantités caractérisant la queue ($n_R(t)$, $v_M(t)$, $v_m(t)$ et $W_R(t)$) évolueront donc lentement après t_M et l'état asymptotique est de plus en plus long à atteindre.

REFERENCES

- 1 - A.A. GALEEV and al. - Soviet J. Plasma Phys. 1, n°1, 5 (1975).
- 2 - LANDAU et LIFSHITS - Physique Statistique - Edition de Moscou.
- 3 - G. PELLETIER - Cours de DEA de Physique des Gaz et des Plasmas (1981).
- 4 - V.E. ZAKHAROV et Yu.S. SIGOV - Journal de Physique C7, 40, 63 (1979).
- 5 - A.S. KINGSEP and al. - Sov. J. Plasma Phys. 4(6), nov.dec., 732 (1979).

CHAPITRE IV

EMISSION D'ONDES SONORES

A. INTRODUCTION

Montrons que sur la base de la théorie statistique exposée au chapitre III nous pouvons décrire l'évolution de l'énergie perdue lors de l'effondrement des cavités par émission d'ondes sonores. Précisons que diverses simulations numériques ont mis en évidence l'importance de ce type de dissipation de l'énergie (1,2,3).

Rappelons que lors de la contraction des cavités le champ électrostatique de Langmuir atteint des valeurs importantes ($W > \mu n_0 k_B T$ dans le cas supersonique), les ions présents dans les cavités vont alors en être violemment expulsés (par le mécanisme exposé au chapitre II) et acquérir une énergie cinétique considérable. D'un point de vue statistique, dans l'étape fortement turbulente, nous pourrions décrire le plasma comme un ensemble de cavités réparties aléatoirement, chacune générant un flux divergent d'ions. Ces ions vont créer dans le "fluide" plasma des zones de compressions et de raréfactions :

Localement, l'augmentation de la densité n du plasma, due au flux d'ions expulsés, va donner naissance à une augmentation locale de la pression $\delta p \propto \delta n$. Les particules vont alors être forcées de quitter ces régions de fortes pressions. Ceci conduit, dans le voisinage immédiat de ces condensations, à la formation de condensations similaires. Le même processus va prendre place dans ces condensations nouvellement formées créant, à leur tour, d'autres condensations dans leur voisinage. Le même processus se répétant nous avons la propagation d'une onde que nous nommerons, d'une manière générale, onde sonore. Les cavités dans cette étape se comportent comme un ensemble d'émetteurs d'ondes sonores. Nous supposons que la destruction des cavités par le flux d'ions des cavités voisines peut être négligé.

B. PUISSANCE RAYONNEE PAR UN CAVITON

A l'aide de la densité lagrangienne libre des phonons \mathcal{L}_s (cf. II-C10).

Nous pouvons écrire l'expression de la densité d'énergie W_s des phonons (dans le système d'unités précédemment définies).

$$W_s = \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} \phi)^2 + |\varphi|^2] \quad (\text{IV-B1})$$

où le premier terme entre crochets est associé à l'énergie cinétique des ions expulsés. Le deuxième terme est lié aux compressions (négatives) de densité du fluide. Notons que dans le cas supersonique nous avons l'inégalité :

$$\vec{v}^2 = (-\vec{\nabla} \phi)^2 \gg \varphi^2 \quad (\text{IV-B2})$$

Et l'inégalité inverse dans le cas subsonique.

De l'expression (IV-B1) nous pouvons déduire l'évolution temporelle de la quantité W_s il vient, en utilisant les équations (II-C14,15) :

$$\frac{\partial}{\partial t} W_s = -\vec{\nabla} \cdot [\vec{v} (\varphi + \frac{1}{2} |\psi|^2)] + \frac{1}{2} |\psi|^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (\text{IV-B3})$$

Intégrons (IV-B3) sur le volume (V) d'un caviton délimité par une surface fermée S, appliquons le théorème d'Ostrogradsky au premier terme de droite, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} d\vec{x} W_s = - \int_{(S)} d\vec{S} \cdot \vec{v} (\varphi + \frac{1}{2} |\psi|^2) + \frac{1}{2} \int_{(V)} d\vec{x} |\psi|^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (\text{IV-B4})$$

Interprétons les divers membres de (IV-B4). Le membre de gauche décrit l'évolution de l'énergie des phonons associée à un caviton. Le dernier membre de droite décrit l'énergie d'interaction entre le champ fluctuant et les oscillations des particules piégées dans le caviton. Le terme médian, que nous noterons Q_s , décrit la puissance perdue, sous forme d'énergie cinétique des ions, à travers la surface (S) du caviton en contraction.

Notons que dans le cas subsonique ($\varphi = -\frac{1}{2} |\psi|^2$) ce terme est nul, il n'y a donc pas d'émission d'onde sonore dans ce cas.

C. EQUATION SPECTRALE DES ONDES SONORES

Introduisons la taille ξ et le paramètre d'énergie ε d'une cavité. Quand l'instant de l'effondrement est approché nous pouvons utiliser les solutions auto-similaires (II-E15) et (II-E20). Exprimons la puissance gagnée Q_s par les ondes sonores en fonction des grandeurs caractéristiques d'un caviton, $Q_s = Q_s(\xi, \varepsilon)$.

Remarquons au préalable que l'utilisation des solutions auto-similaires (II-E15, 20) présuppose l'approximation supersonique, Q_s se simplifie et nous pouvons alors l'écrire sous la forme :

$$Q_s \simeq \frac{1}{2} \int_S d\vec{S} \cdot \vec{v} |\psi|^2 \quad (\text{IV-C1})$$

où $|\psi|^2 = \varepsilon \xi^{-d} h_1(\vec{x}/\xi)$

Pour continuer l'analyse nous avons besoin de l'expression du champ de vitesse \vec{v} dans le régime auto-similaire, cette expression va nous être fournie en utilisant les équations (II-C11, 12) et l'hypothèse supersonique, nous avons pour équation reliant \vec{v} et ψ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{IV-C2})$$

Examinons le cas d'une géométrie à symétrie sphérique. \vec{v} sera alors radial et $\vec{v} = v_r \vec{e}_r$. Cherchons des solutions du type $v_r = w(t) h_3(r/\xi(t))$

L'équation (IV-C2) se réécrit :

$$\xi^{-1} w(t) h_4(\zeta) = -2 \frac{\dot{\xi}}{\xi} \xi^{-2} h_5(\zeta) \quad (\text{IV-C3})$$

où nous avons posé

$$\zeta = r/\xi, \quad h_4(\zeta) = \frac{1}{\zeta^{d-1}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^{d-1} h_3(\zeta)$$

et

$$h_5(\zeta) = \frac{1}{2} \zeta \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} h_2(\zeta) - h_2(\zeta) \quad (\text{IV-C4})$$

Il vient par simple identification et en utilisant la relation (II-E23) :

$$W(t) = 2 \chi(\xi, \varepsilon) \xi^{-1} \quad (\text{IV-C5})$$

Précisons que l'examen du cas d'une géométrie à symétrie cylindrique, où $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_z \vec{e}_z$, confirme le comportement ci-dessus.

Utilisons l'hypothèse d'isotropie et les expressions que nous avons calculées, Q_s s'écrit :

$$Q_s(\xi, \varepsilon) = 2 C \chi(\xi, \varepsilon) \xi^{-2} \quad (\text{IV-C6})$$

où C est une constante de l'ordre de l'unité ayant pour expression :

$$C = \int d\theta f(\theta) \int d\vec{z} z^{d-2} h_1(\vec{z}) h_2(\vec{z}) \quad (\text{IV-C7})$$

L'intégrale sur Θ portant sur les variables angulaires et $\vec{z} = \vec{x}/\xi$.

Connaissant la densité de puissance émise par une cavité nous pouvons calculer la densité de puissance spectrale $Q_s(k)$ émise par l'ensemble des cavités, ce qui est un terme de source pour l'équation d'évolution du spectre $W_s(k)$ d'ondes sonores ainsi émises.

$$Q_s(k) = \left. \frac{\partial}{\partial t} W_s(k) \right|_{\text{émission}} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\delta n_s \delta n_s}{n_o^2} \right\rangle_R n_o k_B T \quad (\text{IV-C8})$$

et

$$Q_s(k) = (\mu^3 \omega_R n_o k_B T) n_{\text{cav}} \iint d\xi d\varepsilon p(\xi, \varepsilon) \xi q(k\xi) Q_s(\xi, \varepsilon) \quad (\text{IV-C9})$$

où les δn_s sont les perturbations de densité créées par le flux d'ions expulsés. Exprimons $Q_s(\xi, \varepsilon)$ en fonction de la densité spectrale d'énergie $W(k)$ (cf III-C15) et du taux de transfert $\nu(k)$ (III-C25), il vient :

$$Q_s(k) = 2 \left(R \lambda_D \right)^2 \nu(k) W(k) \quad (\text{IV-C10})$$

Ce qui est une fraction de l'ordre de $(k \lambda_D)^2$ de la puissance mise en jeu pour le collapse.

L'équation d'évolution du spectre d'ondes sonores se déduit aisément :

$$\frac{\partial}{\partial t} W_s(k) = 2(k\lambda_D)^2 \nu(k) W(k) - 2 \gamma_s(k) W_s(k) \quad (\text{IV-C11})$$

où nous avons inclu l'absorption résonnante Landau, modélisée par $\gamma_s(k)$, sur ce mode ; avec :

$$\gamma_s(k) = \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2} 3 \mu k \lambda_D \omega_{pe} \quad (\text{IV-C12})$$

Lorsqu'un régime stationnaire est établi le niveau spectral d'énergie sonore suit la loi :

$$W_s(k) = (k\lambda_D)^2 \frac{\nu(k)}{\gamma_s(k)} W(k) \quad (\text{IV-C13})$$

soit pour la zone inertielle :

$$W_s(k) = \left(\frac{8}{\pi}\right)^{1/2} (27 \mu)^{-1/2} \frac{\nu(k_*)}{\omega_{pe}} W(k_*) \quad (\text{IV-C14})$$

et pour la zone dissipative :

$$W_s(k) = \left(\frac{8}{\pi}\right)^{1/2} (27 \mu)^{-1/2} \frac{\nu(k_m)}{\omega_{pe}} \left(\frac{k}{k_m}\right)^{-2} W(k_m) \quad (\text{IV-C15})$$

où k_m est un nombre d'onde où la dissipation Landau des particules balance le taux de transfert .

Nous en concluons que dans la zone inertielle le spectre de la densité d'énergie sonore est blanc et décroît en k^{-2} dans la zone dissipative.

D. EQUATION SPECTRALE DE L'ENERGIE ASSOCIEE AUX RAREFACTIONS DE DENSITE

Dans le paragraphe précédent nous avons considéré l'énergie sonore associée aux perturbations de densité créées par le flux d'ions expulsés, qu'en est-il de l'énergie liée aux raréfactions de densité Sn_r des cavités ? Nous conviendrons de nommer cette densité d'énergie l'énergie de raréfaction $W_r(k)$.

Nous savons (cf chap. II) que dans l'étape auto-similaire φ se comporte comme :

$$\varphi = - \xi^{-2} h_2(\vec{x}/\xi) \quad (\text{IV-D1})$$

L'énergie de raréfaction dans une cavité de taille $\xi(t)$ et de volume $V_{\text{cav}}(t)$ s'écrit :

$$\mathcal{E}_r(\xi) = \int_{V_{\text{cav}}(t)} d\vec{x} \varphi^2 = c' \xi^{d-4} \quad (\text{IV-D2})$$

où

$$c' = \int_{V_{\text{cav}}(t)} d\vec{x} \xi^{-d} h_2(\vec{x}/\xi) \quad (\text{IV-D3})$$

Connaissant la densité d'énergie $\mathcal{E}_r(\xi)$ d'une cavité et la statistique $P(\xi, \varepsilon)$ régissant les cavités nous avons pour expression de la densité spectrale d'énergie de raréfaction $W_r(k)$.

$$W_r(k) = \left\langle \frac{\delta n_r \delta n_r}{n_0^2} \right\rangle_k n_0 k_B T = \mu^2 n_0 k_B T n_{\text{cav}} \iint d\xi d\varepsilon P(\xi, \varepsilon) \mathcal{E}_r(\xi) \quad (\text{IV-D4})$$

L'évolution temporelle de $W_r(k)$ se déduit aisément en appliquant membre à membre l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} W_r(k) \propto \iint d\xi d\varepsilon \mathcal{E}_r(\xi) \frac{\partial}{\partial t} P(\xi, \varepsilon) \quad (\text{IV-D5})$$

Sachant que $P(\xi, \varepsilon)$ obéit à l'équation de Liouville (III-C3) il vient à la suite de quelques calculs :

$$\frac{\partial}{\partial t} W_r(k) = -\frac{1}{k^{d-5}} \frac{\partial}{\partial k} \left[k^{d-4} \mathcal{V}(k) W_r(k) \right] - 2 \gamma_s(k) W_r(k) \quad (\text{IV-D6})$$

où nous avons tenus compte de la contribution de l'absorption résonnante Landau $\gamma_s^{(k)}$ (voir IV-C12) sur le spectre.

Cherchons la solution de l'équation (IV-D6) lorsqu'un régime stationnaire est établi. Nous devons distinguer deux régions spectrales ; la zone inertielle, où $\nu_k \propto k^{d/2}$, et la zone dissipative, où $\nu_k \propto k^{d/2-1}$. Remarquons que sur l'ensemble du spectre (et ce quelle que soit la dimension d) $\gamma_s(k) \propto k$ (cf IV-C12). Intégrons le membre de droite de (IV-D6) il vient pour la zone inertielle :

$$W_r(k) = W_r(k_*) \left(\frac{k}{k_*} \right)^{4-\frac{3d}{2}} \exp \left\{ -\frac{2}{3^{1/2}} \left(\frac{\pi}{8} \right)^{1/2} \frac{\mu^{3/2}}{1-\frac{d}{2}} \frac{\omega_{pe}}{\nu_*} \left[\left(\frac{k}{k_*} \right)^{1-\frac{d}{2}} - 1 \right] \right\} \quad (\text{IV-D7})$$

Nous voyons que, pour tout d , le terme exponentiel est toujours très petit (remarquer le facteur $\mu^{3/2}$), nous pouvons donc avec une très bonne approximation le négliger (pour $d = 2$ (IV-D7) n'est plus valable), le spectre inertiel suit alors la loi :

$$W_r(k) = W_r(k_*) \left(\frac{k}{k_*} \right)^{4-\frac{3d}{2}} \quad (\text{IV-D8})$$

Dans la zone dissipative la chute du taux de transfert modifie cette solution, un autre régime stationnaire se forme il vient :

$$W_r(k) = W_r(k_m) \left(\frac{k}{k_m} \right)^{5-\frac{3d}{2}} \exp \left\{ -\frac{2}{3^{1/2}} \left(\frac{\pi}{8} \right)^{1/2} \frac{\mu^{3/2}}{2-\frac{d}{2}} \frac{k_m}{k_*} \frac{\omega_{pe}}{\nu_{k_m}} \left[\left(\frac{k}{k_m} \right)^{2-\frac{d}{2}} - 1 \right] \right\} \quad (\text{IV-D9})$$

Tout comme pour la zone inertielle nous pouvons légitimement omettre la contribution de l'exponentielle il vient alors :

$$W_r(k) = W_r(k_m) \left(\frac{k}{k_m} \right)^{5-\frac{3d}{2}} \quad (\text{IV-D10})$$

où comme d'habitude k_m est tel que $\gamma(k_m) \sim \nu(k_m)$

Nous constatons que contrairement au spectre d'ondes sonores la forme du spectre dépend de la dimension du problème considéré.

E. COMPARAISON DES DENSITES D'ENERGIES SONORES ASSOCIEES AU FLUX D'IONS

ET AUX CAVITES

L'étude des deux paragraphes précédents nous a permis de mettre en évidence l'établissement d'une turbulence ionique liée à l'ensemble des perturbations de densité Sn_t du plasma, avec :

$$Sn_t = Sn_r + Sn_s \quad (IV-E1)$$

Nous avons aussi expliqué l'origine physique des deux phénomènes ; déterminons à présent le processus dominant, c'est-à-dire le processus mettant en jeu la densité d'énergie la plus importante.

Pour ce faire nous avons besoin au préalable d'un ordre de grandeur de $W_r(k_*)$. Nous pouvons estimer que pour $k \sim k_*$ le régime de l'instabilité automodulationnelle est approximativement subsonique ; dans ce cas $W_r(k_*)$ peut se déterminer de l'équilibre des pressions thermiques et hautes fréquences soit :

$$\frac{\delta n_r}{n_0} = - \frac{W_*}{n_0 k_B T} \quad (IV-E2)$$

d'où

$$W_r(k_*) \simeq \frac{W_{r*}}{k_*} = \frac{1}{k_*} \left\langle \left(\frac{\delta n_r}{n_0} \right)^2 \right\rangle_* n_0 k_B T = \frac{1}{k_*} \left(\frac{W_*}{n_0 k_B T} \right)^2 n_0 k_B T \quad (IV-E3)$$

Nous sommes à présent en mesure d'estimer le nombre d'onde k à partir duquel l'inégalité :

$$W_r(k) \geq W_s(k) \quad (IV-E4)$$

se vérifie. Il vient, en utilisant les expressions (IV-D9) et (IV-C14) :

$$\bar{k} \geq \left[\frac{8}{9\pi} (\mu \mathcal{R}_*)^{-1} \right]^{\frac{3d}{4}-2} k_* \quad (IV-E5)$$

soit pour $d = 3$

$$\bar{R} \gg c R_*^{-1/4} R_* \quad (\text{IV-E6})$$

$$\text{où } c = \left(\frac{8}{9\pi} \mu^{-1} \right)^{1/4} \approx 6$$

$R_*^{-1/4}$ étant de l'ordre de 10^{-1} ($R_* > 1$) nous constatons que l'inégalité (IV-E6) est facilement vérifiée aux petits nombres d'ondes.

Nous concluons qu'aux échelles définies par un nombre d'onde k tel que $k_* < k < \bar{k}$ le spectre des fluctuations de densité provient principalement de l'apport des ondes sonores émises par le flux d'ions expulsés des cavités et sera décrit par l'équation (IV-C11).

Dans le cas contraire, ce qui correspond à une gamme spectrale Δk étendue, l'apport majeur proviendra de l'énergie contenue dans les cavités (énergie des inhomogénéités de densité) et ce même spectre sera décrit par l'équation (IV-D6).

Terminons ce paragraphe en notant que pour $k = k_*$ le régime est supersonique et l'approximation (IV-E2) est en fait une sur estimation conduisant à une sous estimation de la valeur de \bar{k} .

Néanmoins, pour $d = 3$, \bar{k} est inversement proportionnel à la racine de W_{r*} ce qui nous permet de supposer que l'estimation (IV-E2) conduit à une valeur correcte de \bar{k} .

F. CONTRIBUTION DE LA TURBULENCE FORTE DE LANGMUIR A LA RESISTIVITE ANORMALE.

Il est bien connu (5) que pour une vitesse de dérive $\vec{U} > \vec{U}_s$, où \vec{U}_s est une valeur de seuil, des électrons par rapport aux ions apparaît dans le plasma une brusque augmentation de sa résistance.

Il est admis que, d'une manière générale, cette accentuation anormale de la résistivité peut être décrite par le concept de collisions turbulentes des particules, principalement des électrons (du fait de leur masse relativement aux ions), sur les fluctuations du mode excité.

Dans notre cas nous avons vu que le mode pseudo-sonore ionique était excité par la turbulence forte, cherchons alors la fréquence de collisions ν^* résultant des collisions de la population d'électrons sur cette turbulence ionique acoustique.

Après quelques calculs (voir appendice E) nous obtenons pour expression de ν^* :

$$\nu^* = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \omega_{pe} \int_{R^+} dR \frac{W^s(R)}{n_0 R_B T} \frac{R_D}{R} \quad (\text{IV-F1})$$

Nous devons dans l'expression du spectre turbulent ionique $W^s(k)$ distinguer l'apport de la densité d'énergie du flux d'ions expulsés des cavités ainsi que l'apport de la densité d'énergie des raréfactions de densité, soit :

$$W^s(R) = W_s(R) + W_r(R) \quad (\text{IV-F2})$$

Apprécions ν^* lorsqu'un régime quasi-stationnaire est établi. Nous ne prendrons en compte que les densités d'énergie associées à la zone non dissipative, celles-ci étant les contributions les plus importantes.

Calculons la contribution du flux d'ions expulsés à la fréquence de collision effective ν^* , notons ν_s^* ce terme. Injectons le spectre stationnaire (IV-C14) dans l'expression de ν^* , il vient en fonction du nombre de Reynolds à k_* :

$$\nu_s^* = a \nu_* \mathcal{R}_* \rho_n \left(\frac{k_m}{k_*} \right) \quad (\text{IV-F3})$$

où $a = 2.27 \simeq 7.10^{-2}$

ν_s^* sera plus important que le taux de transfert ν^* pour un nombre d'onde k_m vérifiant la condition :

$$k_m > k_* \exp \left[a \mathcal{R}_* \right]^{-1} \quad (\text{IV-F4})$$

Cette condition se réalise aisément.

Déterminons maintenant la contribution des cavités en tant que réservoir d'énergie fluctuante ionique, notons ν_r^* ce terme.

Injectons le spectre quasi-stationnaire (IV-D8) dans l'expression de ν^* , il vient :

$$\nu_r^* = 2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{W_r(k_*)}{n_0 k_B T} \omega_{pe} k_D \left[1 - \left(\frac{k_*}{k_m} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{IV-F5})$$

Soit en utilisant l'approximation (IV-E3), en introduisant \mathcal{R}_* , et en supposant l'existence d'une zone inertielle étendue ($k_* \ll k_m$) :

$$\nu_r^* = c \mathcal{R}_*^{3/2} \nu_* \quad (\text{IV-F6})$$

$$\text{où } c = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \mu^{1/2} \simeq 1.10^{-2}$$

Nous constatons que ν_r^* dominera ν_* pourvu que $\mathcal{R}_* > c^{-2/3}$, soit

$\mathcal{R}_* > 2.10^1$, ce qui est une condition raisonnable.

Estimons à présent la valeur de \mathcal{R}_* telle que $\nu_r^* > \nu_s^*$, il vient

$$\mathcal{R}_* > b \rho_n^2 \left(\frac{k_m}{k_*} \right) \quad (\text{IV-F7})$$

$$\text{où } b = \left(81 \frac{\pi}{2} \mu \right)^{-1} \simeq 4.10^1$$

Cette condition exige un nombre de Reynolds élevé et n'est pas réalisable pour des pompages modérés.

Nous concluons que la contribution essentielle à la résistivité anormale provient de l'apport du flux d'ions expulsés:

$$\nu^* = \nu_s^* + \nu_r^* \simeq \nu_s^* \quad (\text{IV-F8})$$

Par ailleurs nous avons montré que la fréquence de collisions effective ν^* est importante et devient aisément plus élevée que le taux de transfert ν_* .

Examinons alors dans le paragraphe suivant les conséquences de cette fréquence de collisions effective importante.

G. TURBULENCE FORTE ET INTERACTION FAISCEAU-PLASMA.

Nous nous restreignons au cas d'un faisceau froid, le même type de raisonnement peut s'effectuer pour un faisceau tiède.

Nous supposons que se propage dans le plasma un faisceau d'électrons de densité n_F , telle que :

$$\frac{n_F}{n_0} \ll 1 \quad (\text{IV-G1})$$

de vitesse v_F dont la dispersion en vitesse Δv_F (voir figure G1) vérifie l'inégalité :

$$\frac{\Delta v_F}{v_F} \ll \left(\frac{n_F}{n_0} \right)^{1/3} \quad (\text{IV-G2})$$

Tout d'abord étudions sous quelle condition ce faisceau peut engendrer une turbulence forte de Langmuir, dans l'hypothèse où cette dernière n'est pas excitée directement par le faisceau.

G.a) Condition d'existence de la turbulence forte.

Nous savons que si l'inégalité (IV-G2) est remplie se déclenche une instabilité faisceau-plasma du type hydrodynamique (6).

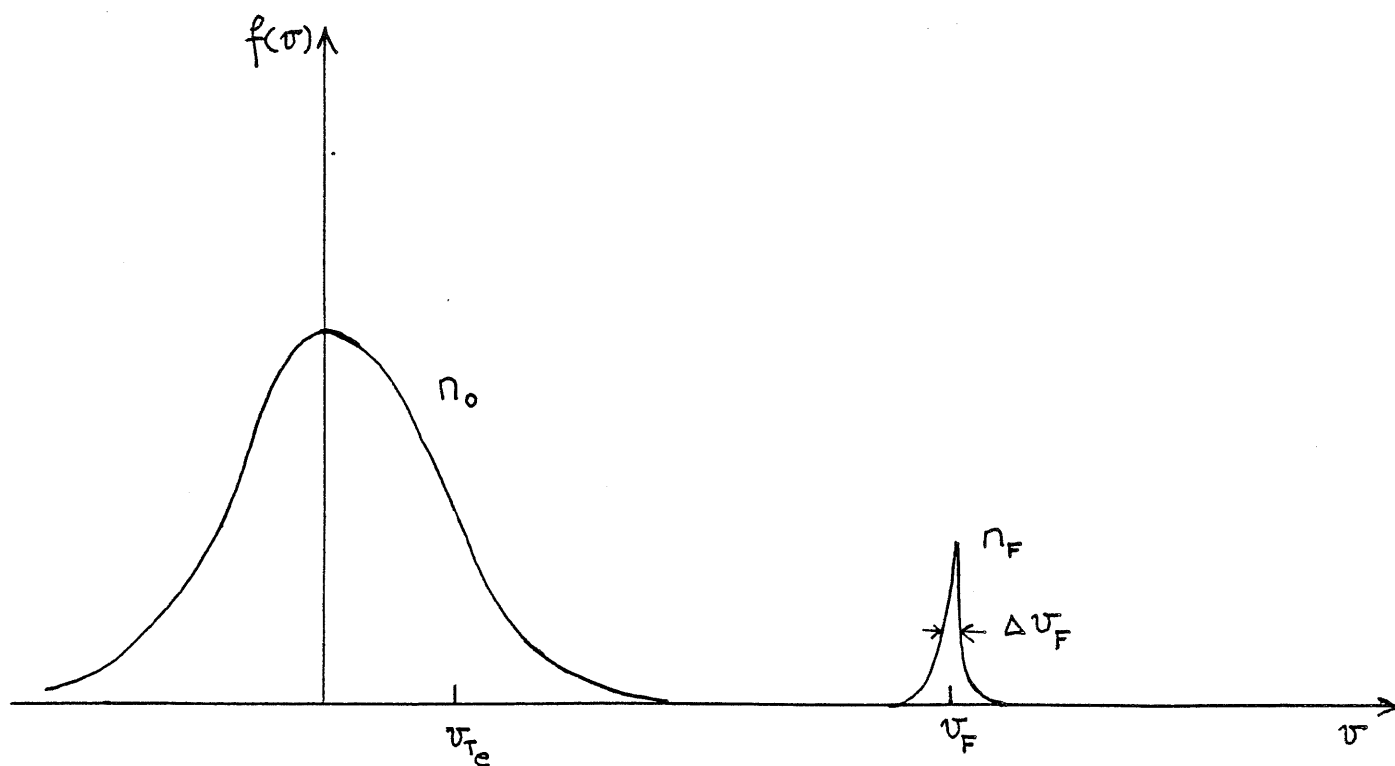


Figure G1 - Distribution électronique d'un plasma, de densité n_0 et de vitesse thermique v_{Te} , et d'un faisceau froid de densité n_F ($n_F/n_0 \ll 1$), de vitesse v_F et de dispersion en vitesse Δv_F ($\Delta v_F/v_F \ll (n_F/n_0)^{1/3}$)

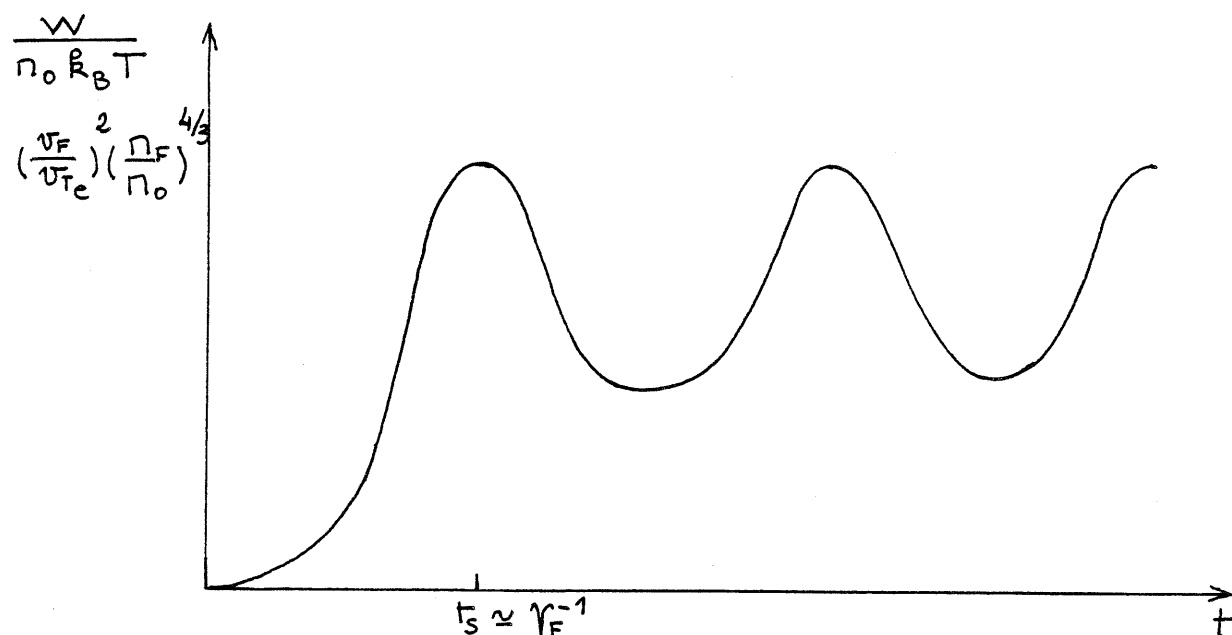


Figure G2 - Dépendance de l'énergie turbulente W en fonction du temps t lors de l'interaction plasma - faisceau froid.

Autour du mode de vitesse de phase v_ϕ satisfaisant l'égalité $v_\phi = v_F$, soit $\omega_{pe} = k_F \cdot v_F$, croissent des ondes de Langmuir. Le taux de croissance maximal de cette instabilité est très important :

$$\gamma_F = \begin{cases} \frac{3^{1/2}}{2^{4/3}} \left(\frac{n_F}{n_0} \right)^{1/3} \omega_{pe} & \text{Dans le cas classique} \\ \frac{3^{1/2}}{2^{4/3}} \left(\frac{n_F}{n_0} \right)^{1/3} \gamma_0^{-1} \omega_{pe} & \text{Dans le cas relativiste} \end{cases} \quad (\text{IV-G3})$$

où $\gamma_0 = \left[1 - \frac{v_F^2}{c^2} \right]^{-1/2}$ est le facteur de Lorentz.

L'onde pompe de l'énergie au faisceau et le ralentit, la densité d'énergie turbulente W croît, sur un temps de l'ordre de γ_F^{-1} , exponentiellement et atteint un seuil de l'ordre de :

$$\frac{W}{n_0 k_B T} \simeq \left(\frac{v_F}{v_{Te}} \right)^2 \left(\frac{n_F}{n_0} \right)^{4/3} \quad (\text{IV-G4})$$

Par la suite l'instabilité est saturée par piégeage des électrons dans le puits d'énergie créé par l'onde (voir figure G2) (6).

Toutefois ce scénario peut être invalidé si nous tenons compte des effets non linéaires ondes-ondes et ondes-particules (cf chapitre II) qui peuvent devenir importants avant que la saturation associée à la seule interaction onde-particule se produise. Il suffira pour cela de remplir la condition :

$$\tau_{NL} < \gamma_F^{-1} \quad (\text{IV-G5})$$

où le temps caractéristique des phénomènes non-linéaires τ_{NL} peut être estimé en utilisant l'expression (II-B19), il vient :

$$\tau_{NL} \simeq \left[\frac{3\mu}{(k\lambda_D)^2} \omega_{pe} \frac{W}{n_0 k_B T} \right]^{-1} \quad (\text{IV-G6})$$

Pour $k \simeq k_F$ l'inégalité (IV-G5) se réécrit :

$$\xi_F = \mu \gamma_0 \frac{n_F}{n_0} \left(\frac{v_F}{v_{Te}} \right)^4 > 1 \quad (\text{IV-G7})$$

Nous concluons que pour $\xi_F \gg 1$, pour un faisceau très énergétique, les effets non-linéaires seront les processus dominant. Nous supposons par la suite que cette inégalité est satisfaite. Dans ce contexte l'énergie turbulente va être refoulée vers les grandes échelles (cf chapitre II). Lorsque la densité d'énergie des ondes de Langmuir vérifiera l'inégalité :

$$\frac{W}{n_0 k_B T} > (k \lambda_D)^2 \quad (\text{IV-G8})$$

s'amorcera l'instabilité d'auto-modulation et la cavitation (chapitre II). Nous sommes dans le régime de turbulence forte et les résultats du paragraphe précédent peuvent être utilisé.

G.b) Temps de relaxation du faisceau.

Estimons le temps de relaxation du faisceau par suite de l'existence d'une turbulence ionique.

Par suite du diamagnétisme du plasma, et lors de la propagation du faisceau dans celui-ci, apparait une densité de courant \vec{J}_R dite de retour tendant à diminuer la densité de courant $\vec{J}_F = -n_F e \vec{v}_F$ du faisceau. Si $\omega_{pe} r_F \gg C$, où r_F est le rayon du faisceau, $\vec{J}_R \simeq -\vec{J}_F$ (7). Nous supposons cette inégalité vérifiée.

Dans notre cas la turbulence ionique est importante, il en résulte, sous nos hypothèses, que la dissipation de l'énergie par effet Joule peut être élevée.

Ecrivons que l'énergie cinétique W_F du faisceau est convertie en énergie thermique (chauffage du plasma) :

$$\frac{d}{dt} W_F = - \vec{J}_F \cdot \vec{E} \quad (\text{IV-G9})$$

où \vec{E} est le champ électrique stockastique ionique. Appliquons la loi d'Ohm ($\vec{J}_F = \sigma \cdot \vec{E}$) et prenons, par analogie, pour expression de la conductivité effective σ la formule classique de Spitzer : $\sigma = ne^2 / m_e \nu$. Dans notre cas $\nu \simeq \nu_S^*$

Utilisons ces résultats, le temps t^* de relaxation du faisceau peut s'écrire :

$$t^* \simeq \gamma_0 \frac{n_0}{n_F} \left(\frac{c}{v_F} \right)^2 \frac{1}{\nu_S^*} \quad (\text{IV-G10})$$

Relions ce temps au taux de croissance de l'instabilité faisceau-plasma. La densité de puissance $Q \simeq 2 \gamma_F W_*$ perdue par le faisceau et acquise par les ondes de Langmuir est pompée par auto-modulation et transférée aux petites échelles d'où $Q \simeq \nu_* W_*$, nous déduisons en nous plaçant dans un régime supersonique :

$$\frac{Q}{\mu n_0 k_B T} = 2 \left(\frac{2 \gamma_F}{\mu \omega_{pe}} \right)^2 \gamma_F \quad (\text{IV-G11})$$

Il vient, d'après l'expression (IV-F3), pour temps de relaxation t^*

$$t^* \simeq b \frac{n_0}{n_F} \left(\frac{c}{v_F} \right)^2 \left(\frac{\omega_{pe}}{\gamma_F} \right)^2 \frac{\gamma_0}{\gamma_F} \ln^{-1} \left(\frac{R_m}{R_*} \right) \quad (\text{IV-G12})$$

où $b = \frac{\mu^2}{24a} \simeq 2 \cdot 10^{-8}$

Cette estimation est valable tant pour un faisceau tiède que froid. Dans le cas d'un faisceau froid et ultrarelativiste ($v_F \sim c$), nous obtenons pour t^* l'ordre de grandeur suivant :

$$t^* \simeq 10^{-7} \left(\frac{n_0}{n_F} \right)^2 \frac{\gamma_0^4}{\omega_{pe}} \quad (\text{IV-G13})$$

Par ailleurs le temps de relaxation t^1 du faisceau due à la seule turbulence forte se détermine d'une façon analogue :

$$t^1 \simeq \frac{W_F}{\nu_* W_*} \simeq \frac{\mu}{8} \frac{n_F}{n_0} \left(\frac{c}{v_{Te}} \right)^2 \left(\frac{\omega_{pe}}{\gamma_F} \right)^2 \frac{\gamma_0}{\gamma_F} \quad (\text{IV-G14})$$

Comparons ces deux estimations :

$$\frac{t^*}{t^L} \simeq c \left(\frac{n_e}{n_F} \right)^2 \left(\frac{v_{Te}}{v_F} \right)^2 \quad (\text{IV-G15})$$

$$\text{où } c = \frac{27\mu}{58} \simeq 8.10^{-5}$$

Le rapport de ces deux temps est indépendant du taux de croissance de l'instabilité et est donc valable tant pour un faisceau chaud que froid.

D'autre part il est clair que le rapport de ces deux temps est très inférieur à l'unité ($t^*/t^L \ll 1$). Nous concluons alors que dans un régime de turbulence forte développée le chauffage Joule du plasma par résistivité anormale, créé par la turbulence forte de Langmuir, tendra à ralentir le faisceau d'une manière efficace et sera un processus non négligeable.

H. EFFET DE CONVERSION.

Introduisons un effet non linéaire se développant aux grandes échelles. Réécrivons, à titre de rappel, les équations de Zakharov en Transformée de Fourier :

$$G_L^{-1}(\vec{x}) E(\vec{x}) = \frac{\omega_{pe}}{2n_0} \int \frac{d\vec{x}'}{(2\pi)^{d+1}} \delta n(\vec{x}') E(\vec{x}-\vec{x}') \vec{e}_{\vec{k}} \cdot \vec{e}_{\vec{k}-\vec{k}'} \quad (\text{IV-H1})$$

$$G_S^{-1}(\vec{x}) \delta n(\vec{x}) = \frac{\varepsilon_0}{4m_i} \int \frac{d\vec{x}'}{(2\pi)^{d+1}} E(\vec{x}') E^\dagger(\vec{x}-\vec{x}') \vec{e}_{\vec{k}} \cdot \vec{e}_{\vec{k}-\vec{k}'} \quad (\text{IV-H2})$$

où nous avons adopté les mêmes notations que précédemment.

Itérons l'équation (IV-H1), prenons la moyenne statistique sur les fluctuations de densité, dans l'hypothèse des phases aléatoires (cf II-B6) nous pouvons écrire la nouvelle expression de (IV-H1) :

$$G_L^{-1}(\vec{x}) E(\vec{x}) = \left(\frac{\omega_{pe}}{2n_0} \right)^2 \int \frac{d\vec{x}'}{(2\pi)^{d+1}} G_L(\vec{x}-\vec{x}') \langle \delta n \delta n \rangle_{\vec{x}} E(\vec{x}) (\vec{e}_{\vec{k}} \cdot \vec{e}_{\vec{k}-\vec{k}'})^2 \quad (\text{IV-H3})$$

Dans les équations précédentes k représente le nombre d'onde des plasmons à des échelles telles que :

$$k < k_* \quad (\text{IV-H4})$$

Similairement k' représente le nombre d'onde des phonons à des échelles où :

$$k' > k_* \quad (\text{IV-H5})$$

De plus dans cette gamme d'échelles nous avons :

$$\omega' \simeq k' c_s \quad (\text{IV-H6})$$

Nous pouvons alors faire les approximations :

$$G_L(\vec{x} - \vec{x}') \simeq G_L(-\vec{x}') \quad (\text{IV-H7})$$

et

$$G_L(-\vec{x}') \simeq -[\omega_c(k) + i\gamma_L(k)] / \omega_c^2(k) \quad (\text{IV-H8})$$

Tenant compte de ces simplifications l'équation d'évolution de l'enveloppe du champ s'écrit :

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} + i(\hat{\gamma}_L + \gamma_{\text{conv}}) + \omega_c(k) \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} + \omega_{\text{conv}} \right] \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{\omega_{pe}}{2n_0} \delta n(\vec{x}, t) \vec{E}(\vec{x}, t) \quad (\text{IV-H9})$$

où nous avons défini :

$$\gamma_{\text{conv}} = \frac{1}{g} \int \frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^d} \frac{W^S(\vec{k}')}{n_0 k_B T} \frac{\gamma_L(\vec{k}')}{(\vec{k}' \lambda_D)^4} \quad (\text{IV-H10})$$

et

$$\omega_{\text{conv}} = \frac{\omega_{pe}}{6} \int \frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^d} \frac{W^S(\vec{k}')}{n_0 k_B T} (\vec{k}' \lambda_D)^2 \quad (\text{IV-H11})$$

et où la densité spectrale d'énergie acoustique $W^S(k)$ a pour expression :

$$W^S(\vec{k}) = \left\langle \frac{\delta n \delta n}{n_0^2} \right\rangle_{\vec{k}} n_0 k_B T \quad (\text{IV-H12})$$

Examinons la signification physique des termes ω_{conv} et γ_{conv} .

Le terme ω_{conv} traduit simplement un décalage spectral non linéaire de l'ensemble du spectre Langmuir. Cet effet Doppler est dû à la présence de bruits d'origine sonore non négligeable aux échelles intermédiaires ($\sim \vec{k}'^{-1}$) où les effets résonnant linéaires sont peu importants. Nous avons déjà vu précédemment l'origine de ces fluctuations basses fréquences.

γ_{conv} décrit un phénomène d'absorption non linéaire du champ haute fréquence par les particules résonnantes du plasma. Plus exactement les battements non linéaires, à la résonance, des ondes hautes fréquences de petits nombres d'onde ($\sim \vec{k}$) avec les ondes basses fréquences de nombres d'onde intermédiaires ($\sim \vec{k}'$) produisent des ondes virtuelles hautes fréquences de nombres d'onde de l'ordre de $\vec{k} \pm \vec{k}'$. Ces plasmons virtuels sont, à ces échelles, sensibles à l'absorption Landau classique par les particules résonnantes du plasma. Nous pouvons visualiser cette interaction par le diagramme de Feynmann de la figure H1.

Nous concluons que, par ce processus de conversion, l'énergie s'écoule directement vers les échelles dissipatives ($\sim k_D$). La cascade de l'énergie avec création d'un spectre turbulent inertiel est alors évitée.

Estimons l'importance de ce mécanisme afin de déterminer si celui-ci peut contrarier l'effondrement des cavités, donc l'établissement d'un spectre à la Kolmogorov.

Pour ce faire calculons γ_{conv} lorsqu'un régime quasi-stationnaire est établi. Nous devons prendre en considération les deux types de bruits iono-acoustiques (cf IV-F2).

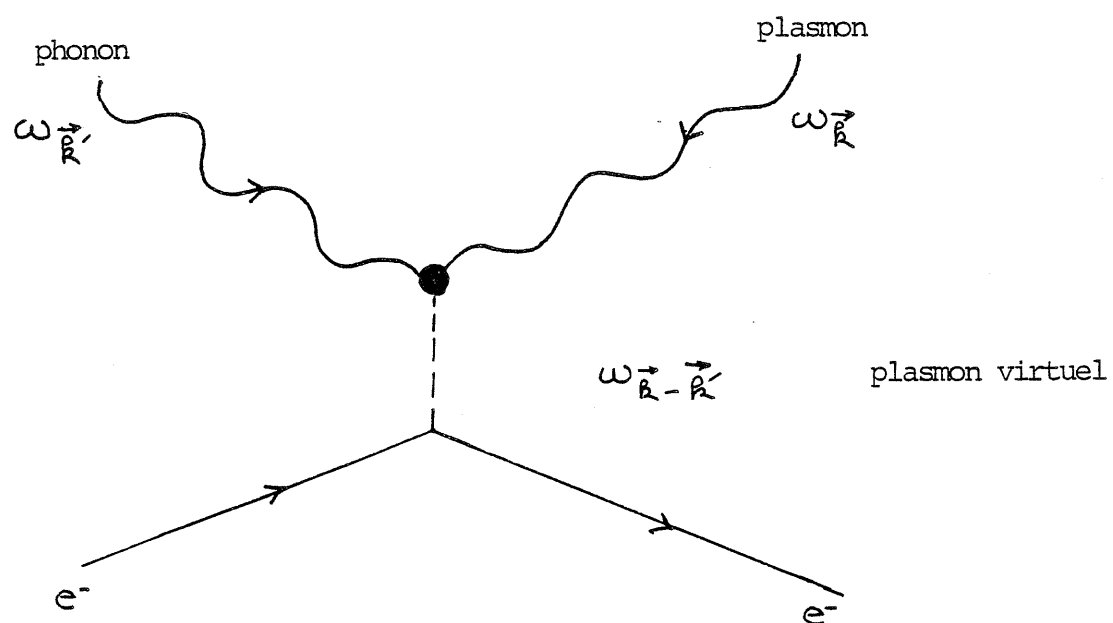


Figure H1 - Conversion ou diffusion non linéaire
phonon - plasmon - électron

Calculons l'apport dû aux flux d'ions expulsés $W_s(k)$. Injectons le spectre (IV-C14) dans l'expression de γ_{conv} et prenons pour le terme de Landau $\gamma_L(k)$ la valeur qui balance le transfert $\mathcal{V}(k)$.

$$\gamma_L(k) \sim \mathcal{V}(k) = \mathcal{V}(k_m) \left(\frac{k}{k_m} \right)^{\frac{d}{2} - 1} \quad (\text{IV-H13})$$

Il vient en introduisant le nombre de Reynolds R_* à k_* :

$$\gamma_{\text{conv}} = c R_*^{3/2} \left(\frac{k_m}{k_*} \right)^{\frac{d}{2} - 3} \mathcal{V}_* \quad (\text{IV-H14})$$

$$\text{où } c = \left(\frac{8}{\pi} \right)^{1/2} \left(27 \mu^{1/2} \left(4 - \frac{d}{2} \right) \right)^{-1}$$

Pour $d = 3$ et pour un plasma de protons nous avons $c \simeq 1,75$. Nous en déduisons que la dissipation aux grandes échelles de l'énergie par conversion peut, en ne considérant que l'effet dû aux bruits créés par le flux d'ions expulsés, être plus importante que le transfert vers les petites échelles pour :

$$k_m < R_* k_* \quad (\text{IV-H15})$$

Calculons maintenant l'apport du terme de fluctuations ioniques des cavités. De la même manière injectons le spectre (IV-D8) dans l'expression de γ_{conv} il vient :

$$\gamma_{\text{conv}} \simeq (\mu^2 d)^{-1} \frac{k_* W_r(k_*)}{n_0 k_B T} \left(\frac{k_m}{k_*} \right)^{-d} \mathcal{V}_* \quad (\text{IV-H16})$$

soit en utilisant la relation (IV-E3)

$$\gamma_{\text{conv}} \simeq (9d)^{-1} R_*^2 P_n \left(\frac{k_m}{k_*} \right)^{-d} \mathcal{V}_* \quad (\text{IV-H17})$$

Cet effet contrariera le transfert pourvu que, $d = 3$:

$$k_m \lesssim \frac{1}{3} R_*^{2/3} k_* \quad (\text{IV-H18})$$

Nous remarquons que cette inégalité est plus difficilement réalisable que la condition (IV-H15).

Nous pouvons déterminer la contribution majeure à la conversion.

De l'inégalité $\gamma_{s\text{conv}} > \gamma_{r\text{conv}}$ nous tirons :

$$R_* < c \left(\frac{k_m}{k_*} \right)^3 \quad (\text{IV-H19})$$

où $c \simeq 2.2 \cdot 10^3$

Cette condition est toujours réalisée, la contribution la plus importante provient de l'apport de l'énergie des fluctuations engendrées par le flux d'ions expulsés des cavités.

Ainsi nous avons montré que la conversion peut dominer le transfert, peut-on alors dire que ce mécanisme stoppe définitivement celui-ci ? /8/. Sur la base théorique dont nous disposons nous pouvons affirmer qu'une telle conclusion est erronée. En effet, supposons que la conversion stoppe le transfert ($\gamma_{\text{conv}}^s \gg \gamma_*^s$). Il est alors clair qu'il n'y a plus d'effondrement des cavités, donc plus de bruit acoustique ($W^s \simeq 0$), donc plus de source d'énergie pour maintenir le phénomène de conversion ($\gamma_{\text{conv}}^s = \omega_{\text{conv}} = 0$). Cependant, aux grandes échelles, la densité de puissance Q est pompée continûment ; l'instabilité d'auto-modulation va de nouveau prendre naissance et le régime de turbulence forte se rétablir avec, initialement, $\gamma_*^s \gg \gamma_{\text{conv}}^s$.

Il se développe alors une queue de particules dont la formation diminue le nombre d'onde $k_m(t)$, l'inégalité (IV- 15) va se re-vérifier, le transfert s'en trouve ralenti et le scénario que nous venons d'exposer ci-dessus se reproduit.

En définitive nous concluons que le mécanisme de conversion, réaction des petites échelles ($\sim k_D$) sur les grandes ($\sim k_*$), génère un phénomène d'intermittence.

R E F E R E N C E S

- 1 - A.A. GALEEV, R.Z. SAGDEEV, Yu. S. SIGOV, V.D. SHAPIRO et V.I. SHEVCHENKO - Soviet Journal of Plasma Physics 1,5 (1975)
- 2 - LANDAU et LIFSHITZ - Physique Statistique, Editions de Moscou (1971)
- 3 - J.M. DOLIQUE - Cours de D.E.A. de Physique des gaz et des Plasmas (1981)
- 4 - G. PELLETIER - Cours de D.E.A. de Physique des gaz et des Plasmas (1981)
- 5 - A. HASEGAWA - Plasma instabilities and non linear effect, Springer-Verlag (1975)
- 6 - T.M. O'NEIL - Ecole d'été, Cadarache, Juillet 1974
- 7 - D.A. Mc ARTHUR, J.W. POUKEY - Phys. Rev. Letters, 27, 1765 (1971)
- 8 - GALEEV and al - J.E.T.P. Letters Vol. 24 N°1, 24 (1976)

C H A P I T R E V

MODÉLISATION NUMÉRIQUE

A. INTRODUCTION

Traisons numériquement, dans un intervalle des nombres d'ondes k_{Min} , k_{Max} soit pour un espace des vitesses v_{Min} , v_{Max} , les équations couplant le spectre turbulent de Langmuir $W(k)$ et la fonction de distribution $f(v)$ des particules du plasma ; nous adopterons le système d'unité précédemment défini. Rappelons les expressions de ces équations :

$$\frac{\partial}{\partial t} W(k) = - \frac{\partial}{\partial k} k v(k) W(k) - 2 \gamma(k) W(k) + Q(k) \quad (\text{V.A1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 D(v) \frac{\partial}{\partial v} f(v)$$

Nous nous plaçons dans les conditions suivantes :

- Le spectre sera coupé inférieurement au nombre d'onde $k = k_{\text{Min}} = 1$, c'est-à-dire pour $k = k_x$.
- En $k = 1$ le régime de l'instabilité est supersonique, ce qui nous impose :

$$W_x > 1 \quad \text{et} \quad v_x = W_x^{1/2} \quad (\text{V.A2})$$

où W_x et v_x sont respectivement la densité d'énergie et le taux de transfert en $k = 1$.

- La densité de puissance $Q(k)$, constante, est "pompée" à la borne inférieure de l'intervalle d'étude et choisi telle que :

$$Q(R) = Q_* \delta(R-1) \quad , \quad Q_* = \nu_* W_* \quad (V.A3)$$

- Nous négligerons l'effet de transfert d'énergie vers les petits nombres d'onde qui résulte de la prise en compte des phénomènes associés à la description de la turbulence faible.

Ecrivons à présent les divers termes sous forme adimensionnée.

B. EXPRESSIONS ADIMENSIONNEES

Utilisons notre système d'unité, nous obtenons :

- pour la condition de résonance Cerenkov :

$$R = C_0 \nu^{-1} \quad C_0 = (3/\mu)^{1/2} \quad (V.B1)$$

- pour le coefficient d'absorption Landau $\gamma_2(k)$:

$$\gamma_L(R) = C_G R^{-3} f(C_0/R) \quad C_G = 3^{3/2} \pi^2 / \mu^{5/2} \quad (V.B2)$$

- pour le taux de transfert de la turbulence forte $\nu(k)$:

$$\nu(R) = \nu_* R^{3/2} \varepsilon^{1/2}(R) \quad (V.B3)$$

où le paramètre d'énergie $\varepsilon(k)$ se déduit de l'expression :

$$\varepsilon^{1/2}(R) = 1 - \nu_*^{-1} \int_{R_{min}}^R dR \gamma(R) R^{-5/2} \quad (V.B4)$$

Nous l'utiliserons également sous la forme :

$$\varepsilon^{1/2}(R) = 1 - C_R \int_{C_0/R}^{\nu_{max}} d\nu \nu^{7/2} f(\nu) \quad (V.B5)$$

où

$$C_R = \frac{\pi^2}{(27\mu)^{1/4}} \nu_*^{-1}$$

- pour le coefficient de diffusion quasi-linéaire $D(v)$

$$D(v) = \frac{c_D}{v^3} \int_{\substack{R_{\max} \\ R \geq c_0/v}}^R dR \, W(R) / R^3 + D(v_{\min}) \quad (V.B6)$$

où

$$c_D = \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{\mu} \right)^{3/2}$$

et où $D(v_{\min})$ contient une éventuelle condition à la borne inférieure de l'espace des vitesses, nous exhiberons dans le paragraphe suivant son expression.

- pour la densité d'énergie cinétique des particules du plasma :

$$E_c = c_E \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} dv \, v^4 f(v) \quad c_E = 2\pi/\mu \quad (V.B7)$$

- pour la densité d'énergie turbulente :

$$W = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} dR \, W(R) \quad (V.B8)$$

C. CHOIX DE $D(v_{\min})$

Considérons la densité d'énergie totale W_{tot} de notre système qui, par définition, est la somme des densités d'énergies spectrales et cinétiques.

$$W_{\text{tot}} = E_c + W \quad (V.C1)$$

Nous souhaitons que la densité de puissance injectée soit Q_* , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{\text{tot}} = Q_* \quad (V.C2)$$

Cette contrainte va nous permettre de déterminer $D(v_{\min})$; en effet appliquons l'opérateur $\partial/\partial t$ à l'expression (V.B9), il vient à la suite de quelques intégrations par parties et en utilisant les définitions du paragraphe précédent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} W_{\text{tot}} = & - \left[k v(k) W(k) \right]_{k_{\min}}^{k_{\max}} \\
& + \frac{2\pi}{\mu} \left[v^3 D(v) \left(v \frac{\partial}{\partial v} f(v) - 2 f(v) \right) \right]_{v_{\min}}^{v_{\max}} \\
& + \frac{12\pi}{\mu} D(v_{\min}) \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} dv v^2 f(v)
\end{aligned} \quad (\text{V.C3})$$

$f(v_{\text{Max}})$ étant très faible face à $f(v_{\text{Min}})$ il est légitime de négliger sa contribution. Egalons le nombre de droite de (V.B11) à Q_* , nous en déduisons alors l'expression de $D(v_{\text{Min}})$, il vient :

$$D(v_{\min}) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{-k_{\max} v(k_{\max}) W(k_{\max})}{v_{\min}^3 \left[v_{\min} \frac{\partial}{\partial v} f(v_{\min}) - 2 f(v_{\min}) \right] - 6 \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} dv v^2 f(v)} \quad (\text{V.C4})$$

Par ce choix nous devrions assurer une injection de densité de puissance constante et égale à Q_* .

D. CHOIX DU MAILLAGE

Nous maillerons l'espace des vitesses dans l'intervalle $v_{\text{Min}}, v_{\text{Max}}$ à l'aide de N points répartis selon une progression géométrique de raison r . Un tel choix se justifie si nous nous attendons à la formation de lois de puissance. Nous aurons donc :

$$v_{i+1} = r v_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

où

$$r = \left(\frac{v_{\max}}{v_{\min}} \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad (\text{V.D1})$$

Nous choisirons

$$v_{\text{Max}} = v_N = C_0 \approx 130$$

$$v_{\text{Min}} = 3$$

L'espace des nombres d'ondes k sera maillé d'une manière identique. Nous avons, à l'aide de la condition de résonance Cerenkov :

$$R_{i+1} = \frac{C_0}{v_{N-i}} = r R_i \quad i=1, 2, \dots, N-1$$

avec :

$$k_{\text{Min}} = k_1 = 1 \quad \text{et} \quad k_{\text{Max}} = k_N = C_0/v_1$$

E. REFORMULATION DES EQUATIONS CINETIQUES

En premier lieu réécrivons le couple d'équations (V.A1) sous forme logarithmique, ceci se justifie d'une part car nous nous attendons à la formation de lois de puissance et, d'autre part, car l'amplitude des variations logarithmiques d'une fonction reste plus faible que celle de la fonction elle-même. Cette dernière remarque est, d'un point de vue numérique, intéressante dans notre cas.

1. Equation spectrale

Développons le membre de droite de l'équation spectrale, remarquons que d'après l'expression (V.B4) nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(k)^{1/2} = -\nu_*^{-1} \gamma(k) R^{-5/2} \quad (\text{V.E1})$$

Nous pouvons, avec bien entendu $W(k)$ non nul pour tous nombres d'onde, réécrire cette équation spectrale sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln W(k) = -\left[\frac{5}{2} + k \frac{\partial}{\partial k} \ln W(k)\right] \nu(k) - \gamma(k) \quad (\text{V.E2})$$

2. Equation quasi-linéaire

Procédons d'une manière analogue, notons que :

$$\frac{\partial}{\partial v} [v^2 D(v)] = \frac{\pi}{2} C_0 W(C_0/v) + 3 v D(v_{\text{min}}) - v D(v) \quad (\text{V.E3})$$

Nous obtenons pour équation d'évolution du logarithme de la fonction de distribution :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_n f(v) = & \left[\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 D(v) + D(v) \frac{\partial}{\partial v} \rho_n f(v) \right] \frac{\partial}{\partial v} \rho_n f(v) \\ & + D(v) \frac{\partial^2}{\partial v^2} \rho_n f(v) \end{aligned} \quad (\text{V.E4})$$

A présent traitons numériquement le couple d'équations (V.E2,4) et les expressions associées.

F. TRAITEMENT NUMERIQUE.

Remarquons que notre système peut, en chaque points du maillage, s'écrire sous la forme vectorielle :

$$\frac{d}{dt} y_i = g(i, t, y_1, y_2, \dots, y_{2N}) \quad i = 1, 2, \dots, 2N \quad (\text{V.F1})$$

où nous avons posé :

$$y_i = \begin{cases} \rho_n w(R_i) & \text{pour } i = 1, 2, \dots, N \\ \rho_n f(v_{i-N}) & \text{pour } i = N+1, N+2, \dots, 2N \end{cases}$$

et où g s'identifie :

- Pour $i = 1, 2, \dots, N$ au membre de droite de l'équation (V.E2) discrétisé sur le maillage des nombres d'onde.

- Pour $i = N+1, N+2, \dots, 2N$ au membre de droite de l'équation (V.E4) discrétisé sur le maillage de l'espace des vitesses.

Cette discrétisation étant faite le problème est d'évaluer les dérivées spatiales; les diverses intégrales ainsi que d'effectuer l'intégration temporelle.

a) Intégration sur la variable temporelle.

Nous utiliserons un programme de la bibliothèque informatique du Groupe d'Astrophysique de Grenoble /1/. Ce programme permet l'intégration d'un système de N équations différentielles du premier ordre écrites sous la forme (V.F1) . La précision de l'intégration est contrôlée par un paramètre EPS fourni par l'utilisateur. Le pas DT de l'intégration est automatiquement ajusté durant le calcul en fonction de la précision désirée.

b) Calcul des dérivées spatiales.

Nous déterminerons les dérivées spatiales en utilisant, en tant que moyen de dérivation numérique, une méthode d'interpolation basée sur l'utilisation de fonctions cubiques par morceaux connues sous le nom de fonctions splines. Précisons sommairement la méthode /2/.

Dans chaque sub-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ ($x \equiv k$ ou v) $y(x)$ est approximée par un interpolant $S(x)$ deux fois continûment dérivable. Sur cet intervalle $S(x)$ est un polynôme $P_i(x)$ du troisième degré.

$$P_i(x) = P_i(x_i) + (x-x_i) P_i^{(1)}(x_i) + \frac{1}{2} (x-x_i)^2 P_i^{(2)}(x_i) + \frac{1}{6} (x-x_i)^3 P_i^{(3)}(x_i) \quad (\text{V.F2})$$

En utilisant les conditions de continuité et de dérivabilité on montre /2/ que :

- Pour i variant de 1 à N , les $P_i^{(j)}(x_i)$ sont les approximations aux dérivées j ième ($j=1,2$)

- Pour i variant de 1 à $N-1$, les $P_i^{(3)}(x_i)$ approximent $y^{(3)}(x_i)$;
 $P_N^{(3)}(x_N)$, sans signification, est choisi égal à zéro.

- $P_i(x_i) = y(x_i)$

- $P_1^{(1)}(x_1)$ et $P_N^{(1)}(x_N)$ étant connu les différentes dérivées se calculent en résolvant, par élimination de Gauss, un système tridiagonal linéaire de $N-2$ équations sur les $N-2$ coefficients $P_2^{(1)}(x_2), \dots, P_{N-2}^{(1)}(x_{N-2})$.

Terminons en précisant que, à notre connaissance, la seule contre-indication à l'utilisation des fonctions "splines" est une variation rapide ou un comportement oscillatoire des fonctions à étudier. La variation rapide, sur quelques pivots, de $f(v)$ et $W(k)$ n'est pas à exclure, pour remédier à cet inconvénient nous avons considéré le logarithme de $f(v)$ et $W(k)$, ce qui justifie les écritures (V.E2,4).

c) Calcul des intégrales.

Les intégrales que nous devons évaluer sont contenues dans :

- Le coefficient de diffusion $D(v)$
- Le paramètre d'énergie $\mathcal{E}(k)$
- La densité d'énergie cinétique E_c
- La densité d'énergie turbulente W .

Nous utiliserons les "splines" pour les évaluer.

Détaillons, à titre d'exemple, le calcul de la densité d'énergie turbulente W . Discretisons W sur le maillage de l'espace des nombres d'ondes, soit :

$$W = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{k_i}^{k_{i+1}} dk W(k) \quad (V.F3)$$

Posons que dans chaque sous intervalle $[k_i, k_{i+1}]$ $W(k)$ est un polynôme du troisième degré (nous confondons pour simplifier l'exposé interpolant et interpolé) de la forme (V.D2), l'intégration de l'expression (V.F3) est alors aisée, il vient en tenant compte d'un maillage logarithmique :

$$W = \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ a_0 k_i W(k_i) + a_1 k_i^2 W^{(1)}(k_i) + a_2 k_i^3 W^{(2)}(k_i) + a_3 k_i^4 W^{(3)}(k_i) \right\}$$

où

$$\begin{aligned} a_0 &= r-1, & a_1 &= \frac{1}{2} (r-1)^2 \\ a_2 &= \frac{1}{6} (r-1)^3, & a_3 &= \frac{1}{24} (r-1)^4 \end{aligned} \quad (V.F4)$$

Les autres intégrales seront calculées en suivant la même technique.

d) Résultats.

Tout d'abord éprouvons notre méthode sur un système d'équations classique, nous avons choisi d'intégrer le couple d'équations standard de la théorie quasi-linéaire (voir appendice F). Les résultats sont excellents tant pour la conservation de la densité d'énergie et de particules que pour la concordance avec les résultats théoriques.

Intégrons à présent le couple d'équation (V.E2,4), nous suivrons au cours du temps l'évolution de la quantité $\Delta E/E$ définie comme :

$$\frac{\Delta E}{E} = 100 \times \frac{\left(\begin{array}{c} \text{Densité d'énergie totale} \\ \text{théorique à l'instant } t \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Densité d'énergie totale} \\ \text{calculée à l'instant } t \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} \text{Densité d'énergie} \\ \text{injectée } (Q_*t) \end{array} \right)} \quad (\text{V.F5})$$

Cette quantité mesure la conservation de l'énergie totale à l'instant t considéré.

Nous avons choisi pour conditions initiales :

- Une maxwellienne pour la fonction de distribution $f(v)$

$$f(v) = (2\pi)^{-3/2} \exp\left[-\frac{1}{2} v^2\right] \quad (\text{V.F6})$$

- Une loi de puissance pour le spectre d'énergie turbulente $W(k)$

$$W(k) = W_* k^{-6}$$

et $W_* = 8$ (V.F7)

Nous constatons après exécution du programme de $t = 0$ à $t = 32$ que :

- L'énergie du système se conserve correctement (voir figure V.1). L'erreur maximale relative $\Delta E/E$ est de l'ordre de - 3% et est atteinte pour $t \sim 2$, par

la suite cette erreur diminue et tend vers - 1%. Nous concluons que d'un point de vue énergétique le modèle s'avère satisfaisant.

- Sur un temps de l'ordre de ν_*^{-1} (ici $\nu_*^{-1} \sim 0.4$) le spectre inertiel s'établit sur l'ensemble du domaine, de plus la loi de puissance d'indice spectral - 5/2 se forme dans cette région (voir figure V.2) confirmant ainsi la théorie néanmoins pour $\nu_*^{-1} < t < 32$ nous remarquons que l'évolution est négligeable et que le spectre dissipatif ne s'établit pas, ce dernier point étant dû à une queue de particules insuffisamment formée.

- Aux grandes vitesses une queue de particules se développe, aucune loi de puissance précise ne pouvant en être déduite (voir figure V.2). Nous remarquons également que l'évolution est continue, aucun régime quasi-stationnaire n'est atteint contrairement au spectre turbulent.

Sur la base de ces résultats il est alors légitime d'effectuer l'hypothèse d'un spectre turbulent $W(k)$ quasi-stationnaire, nous pouvons écrire ce dernier sous la forme (voir chapitre III) :

$$W(k) = W(k_*) k^{-5/2} \mathcal{E}(k) \quad (V.F8)$$

Intégrons alors l'équation (V.E4) et l'expression (V.F8) du spectre, avec toujours $W(k_*) = 8$, jusqu'à $t = 250$; nous constatons (voir figure V.3) :

- Au cours du temps un spectre dissipatif s'établit, "gagne" sur les petits nombres d'onde et détruit le spectre inertiel, néanmoins aucune loi de puissance précise ne peut en être déduite; par ailleurs le spectre inertiel demeure présent sur une gamme d'onde étendue et ceci malgré des temps élevés.

- Après un développement rapide de $t = 0$ à $t = 50$ la formation de la queue de particules tend à se ralentir, aucun régime quasi-stationnaire n'est cependant atteint et il n'est pas possible de déduire une loi de puissance pour cette queue suprathermique.

Notons que, d'après l'expression (III.F30), le temps limite de validité de la théorie est, avec nos paramètres, de l'ordre de $t = 240$.

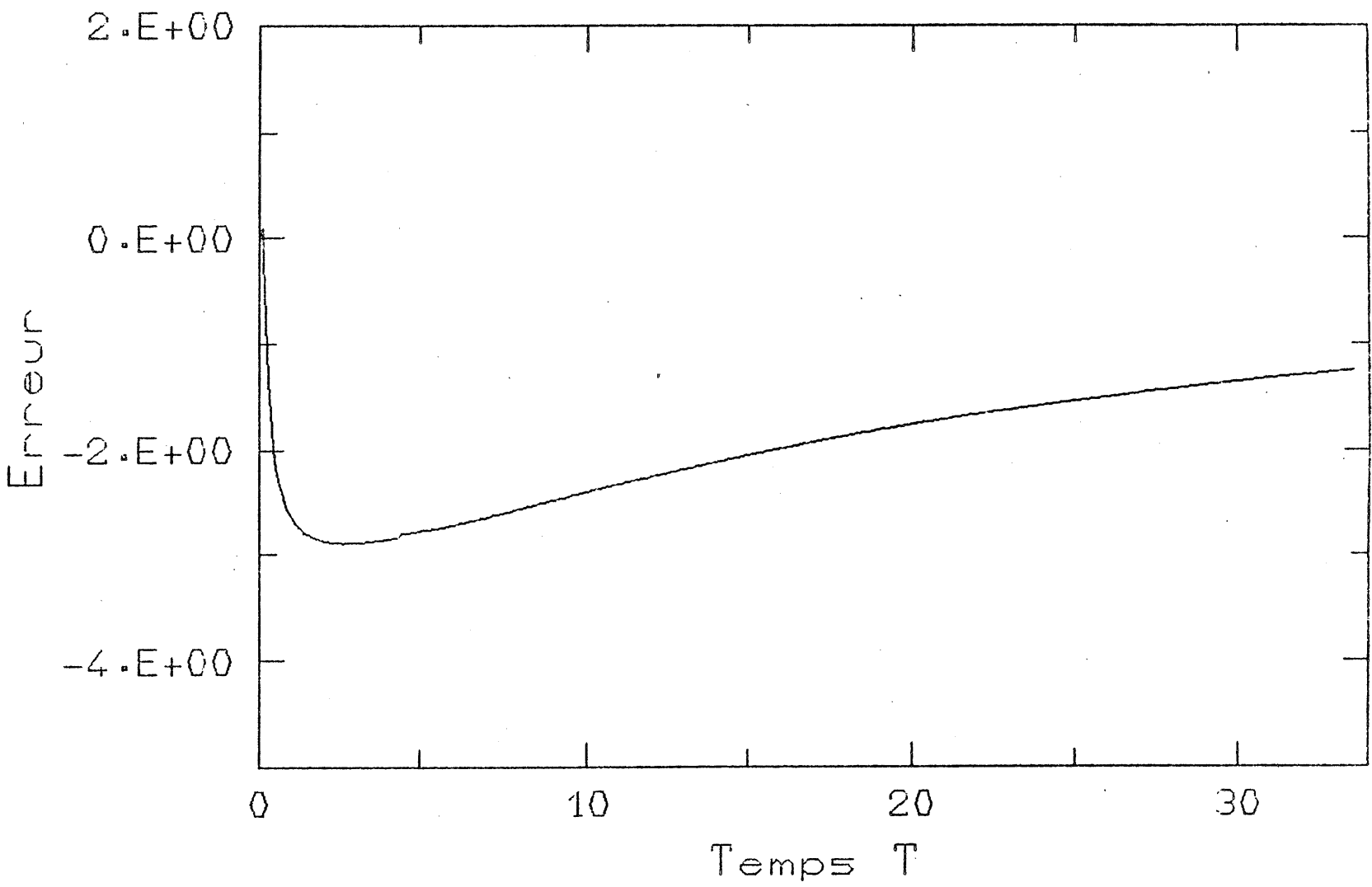


Figure V-1 : Pourcentage d'erreur relative sur la conservation de l'énergie au cours du temps.

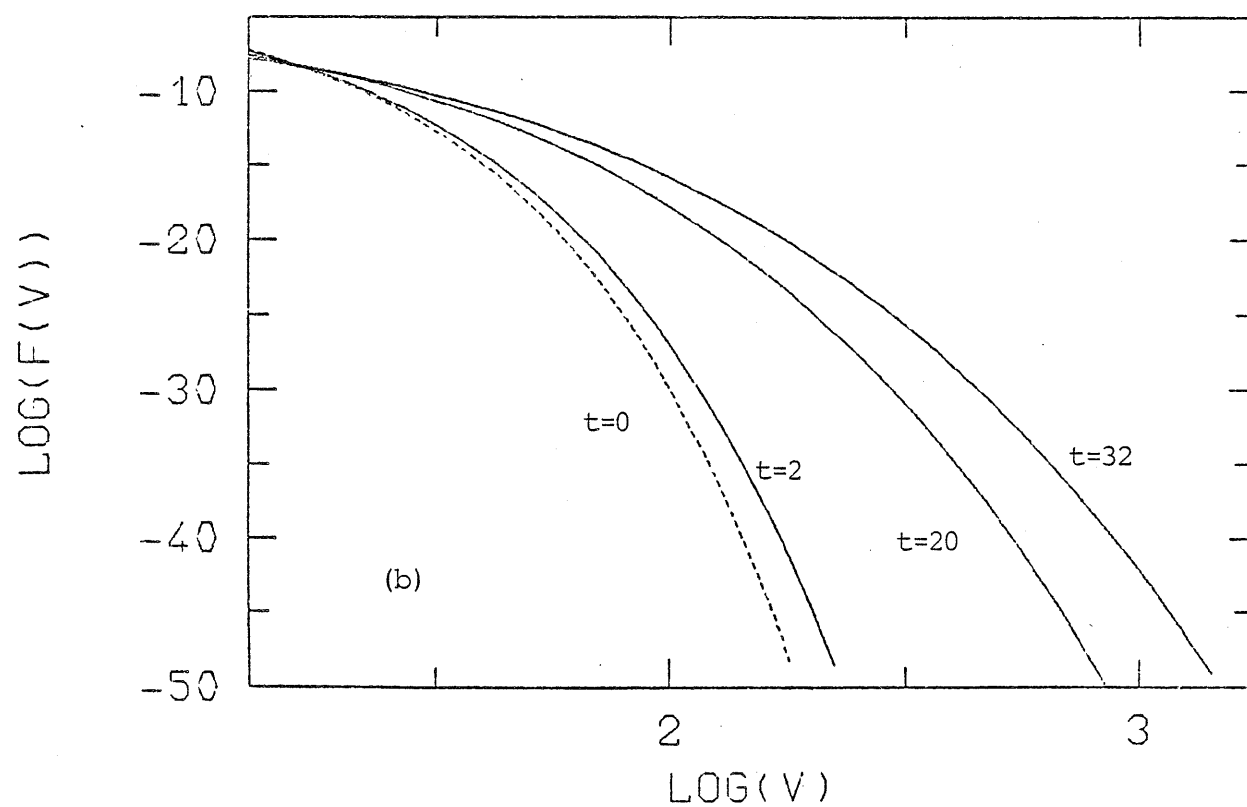
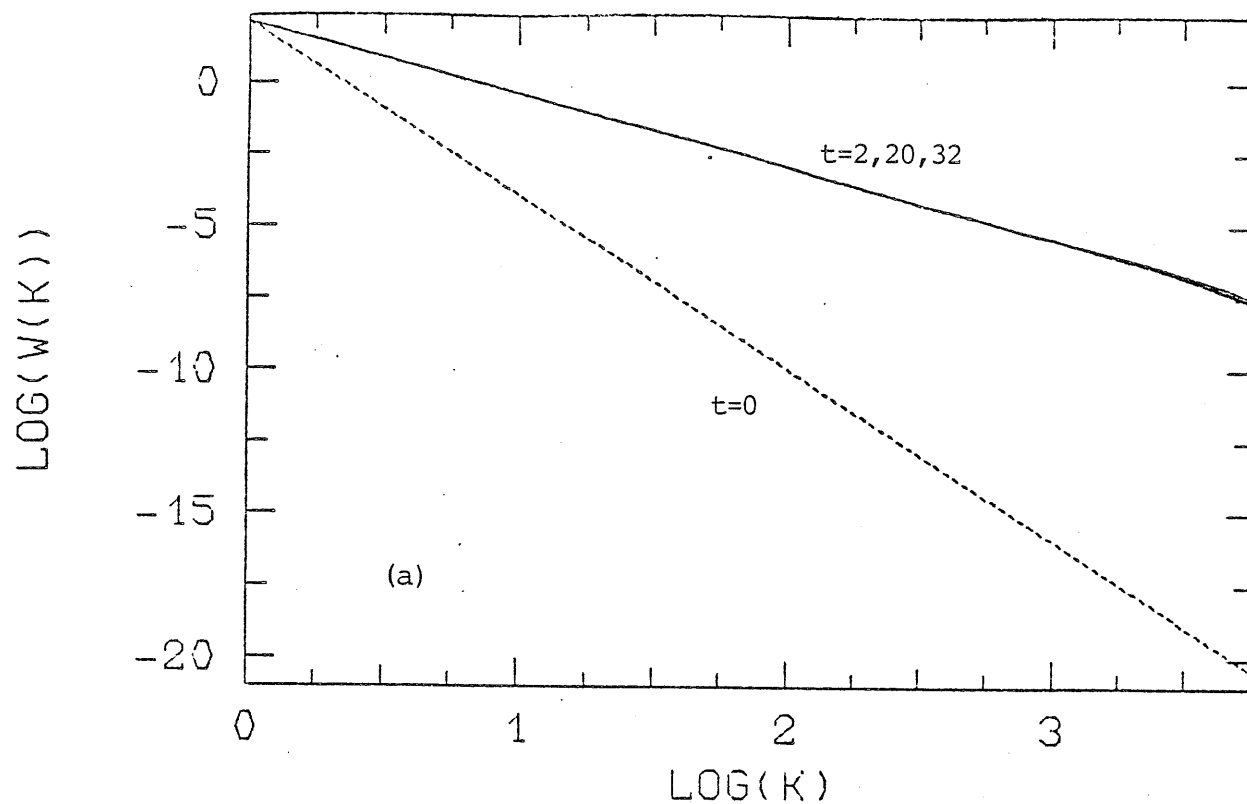


Figure V-2 : (a) Evolution temporelle du logarithme du spectre turbulent $W(k)$ en fonction du nombre d'onde k .
 (b) Evolution temporelle du logarithme de la fonction de distribution $F(v)$ en fonction du logarithme de la vitesse.

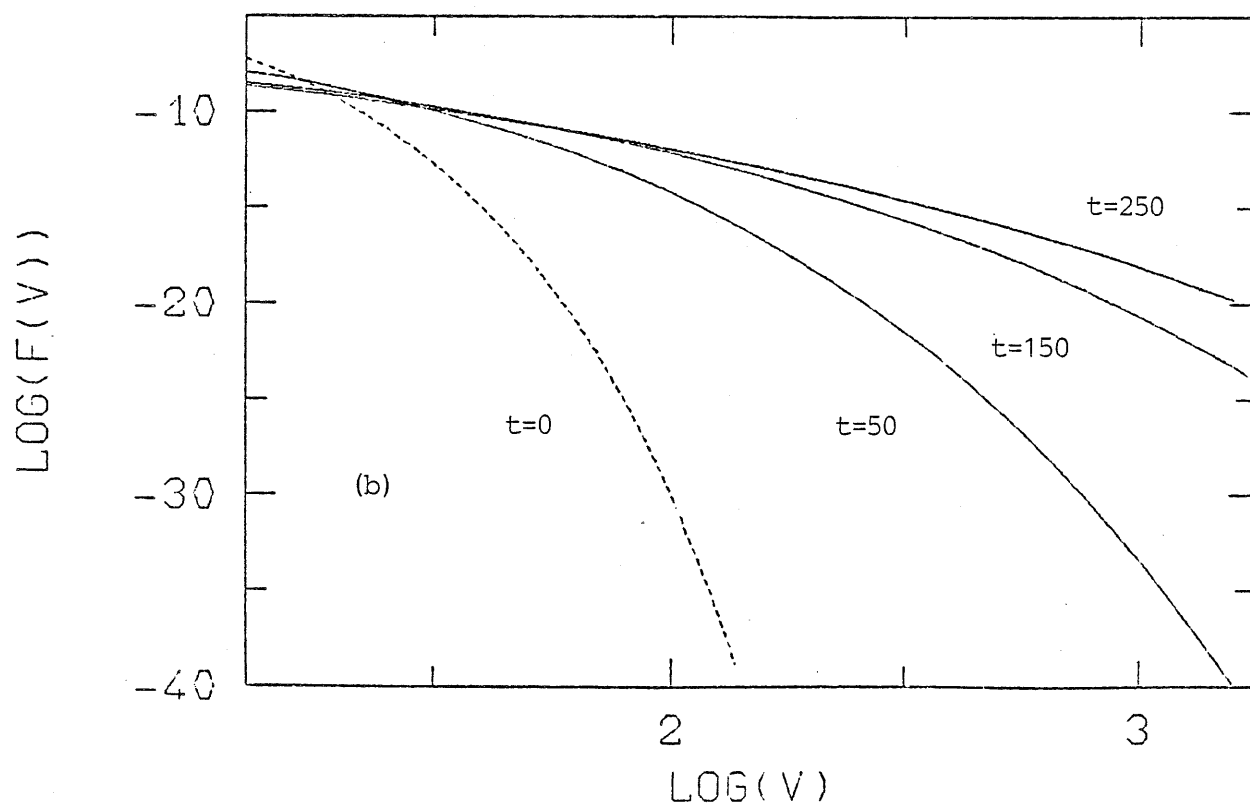
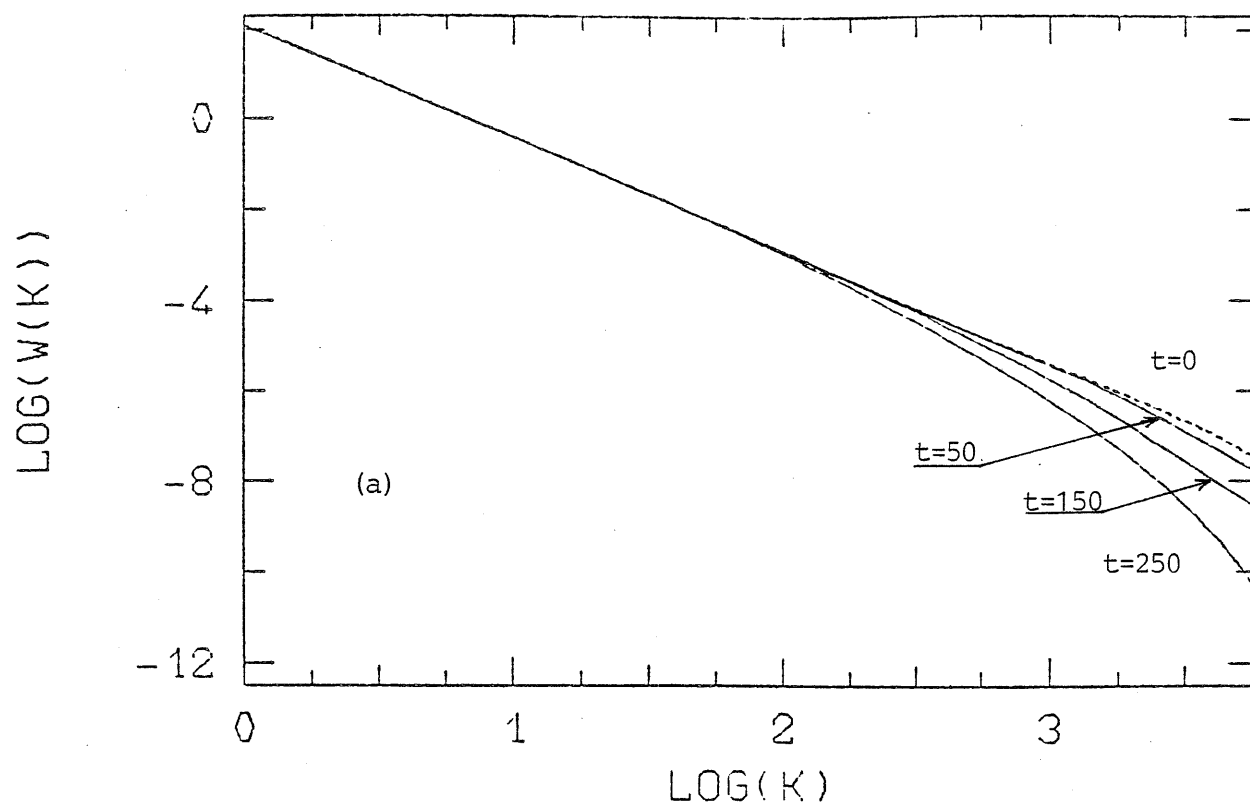


Figure V-3 : (a) Evolution temporelle du logarithme du spectre intégré turbulent $W(k)$ en fonction du logarithme du nombre d'onde k .
 (b) Evolution temporelle du logarithme de la fonction de distribution $F(v)$ en fonction du logarithme de la vitesse v .

R E F E R E N C E S

- 1 - P. VALIRON, Communication personnelle.
- 2 - DE BOOR, "A Practical guide to spline", Springer-Verlag.

CHAPITRE VI

TURBULENCE DE LANGMUIR ET SYSTEME DYNAMIQUE A PETITS DEGRES DE LIBERTE.

A. DESCRIPTION SPECTRALE

A la suite de la théorie statistique et des divers processus étudiés dans les chapitres précédents nous pouvons raisonnablement modéliser la turbulence de Langmuir par l'ensemble des équations spectrales suivantes ($d = 3$) :

$$\frac{\partial}{\partial t} W_p(k) = 2 \gamma_{\text{inst.}}(k) W_p(k) - 2 \gamma_{\text{conv}} W_p(k) - Q_p(k) \quad (\text{a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W(k) = Q(k) - \frac{\partial}{\partial k} k \nu(k) W(k) - 2 \gamma_L(k) W(k) - 2 \nu(k) (k \lambda_D)^2 W(k) \quad (\text{b})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_s(k) = 2 \nu(k) (k \lambda_D)^2 W(k) - 2 \gamma_s(k) W_s(k) \quad (\text{VI-A1}) \quad (\text{c})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_r(k) = - k^2 \frac{\partial}{\partial k} k^{-1} \nu(k) W_r(k) - 2 \gamma_s(k) W_r(k) \quad (\text{d})$$

Commentons ce système :

L'équation (a) décrit l'évolution de la "pompe", qui s'exerce aux grandes échelles où l'absorption Landau $\gamma_L(k)$ est absente, alimentant en énergie le spectre langmuirien. Celle-ci est entretenue par une instabilité, par exemple du type faisceau-plasma, donnant pour terme de source la densité de puissance $2 \gamma_{\text{inst.}}(k) W_p(k)$. Dans cette gamme des petits nombres d'onde les pertes énergétiques de la pompe sont causées par deux mécanismes distincts :

- Les pertes par conversion qui résultent de l'existence d'une turbulence ionique, celles-ci sont modélisées par le terme γ_{conv} .

- Les pertes consécutives à l'excitation de l'auto-modulation, traduites par le terme $Q_p(k)$, et telles que :

$$\int_{k_{p,inf.}}^{k_{p,sup.}} dk Q_p(k) = \int_0^{k_{seuil}} dk Q(k) \quad (VI-A2)$$

où la première intégration porte sur la largeur spectrale $\Delta k_p = k_{p,sup} - k_{p,inf.}$ de la pompe, nous supposons que cette dernière peut être considérée comme quasi-monochromatique, c'est-à-dire $\Delta k_p/k_p \ll 1$ alors $Q_p(k) \simeq Q_p \delta(k - k_p)$. k_{seuil} est le nombre d'onde au delà duquel l'instabilité auto-modulationnelle n'existe plus, dans le cas subsonique k_{seuil} est donné par l'expression (II-D5).

Pour $0 < k < k_p$ l'équation (b) décrit l'évolution du spectre de turbulence forte de Langmuir. Le terme de source $Q(k)$ traduit un apport de densité de puissance spectrale due à l'instabilité de la pompe (automodulation), ce qui revient à écrire :

$$Q(k) = 2 \gamma_{SM}(k) W(k) \quad (VI-A3)$$

où $\gamma_{SM}(k)$ est le taux de croissance de cette instabilité, fonction de la densité d'énergie W_p de la pompe. Pour une pompe monochromatique et en se plaçant dans le cas d'une approximation soit subsonique, soit supersonique nous avons calculé (voir chapitre II-D) les taux de croissances maximaux, rappelons en les expressions :

$$\begin{aligned} k = k_{sub} \quad \gamma_{SM}(k) &= \frac{W_p}{n_0 R_B T} \omega_{pe} && \text{cas subsonique} \\ k = k_{sup} \quad \gamma_{SM}(k) &= \left(\frac{\mu W_p}{n_0 R_B T} \right)^{1/2} \omega_{pe} && \text{cas supersonique} \end{aligned} \quad (VI-A4)$$

Notons que, puisque $\gamma_{SM}(k)$ est "piqué" autour de ce nombre d'onde maximisé, nous pouvons légitimement appliquer à ce terme le théorème de la moyenne pour $k = k_{sub}$ (ou k_{sup}) l'intégration du membre de droite de (IV-A2) est alors immédiate.

Dans cette même équation (b) le terme différentiel traduit la cascade d'énergie, par contraction des cavités, vers les petites échelles où s'effectue une forte dissipation sur les particules résonnantes du plasma. Le dernier terme du membre de droite modélise les pertes découlant de l'excitation, par le flux d'ions expulsés des cavités, de la turbulence ionique.

Les équations (c, d) décrivent l'évolution des spectres des densités d'énergie de cette turbulence ionique engendrée d'une part par le flux d'ions expulsés (équation (c)) et d'autre part par les cavités elles même (équation (d)). Nous avons étudié ces équations au chapitre IV.

De plus parce que $\gamma_i(k) \propto f(\omega_{pe}/k)$ nous devrions inclure une équation d'évolution pour la fonction de distribution $f(v)$. Nous nous affranchirons de cette dernière en nous plaçant à des instants où son évolution est lente et où la queue de particules est déjà développée.

Néanmoins malgré cette hypothèse le système (VI-A1) reste complexe, proposons nous par souci de simplification d'étudier les densités d'énergie.

B. EVOLUTION DES DENSITES D'ENERGIE.

Dans le but d'examiner plus aisément l'existence d'états turbulents quasi-stationnaires ou intermittents intéressons nous à l'évolution des densités d'énergies associées aux équations spectrales précédentes. Malgré la perte de cette description spectrale nous pouvons légitimement estimer que l'évolution prédominante sera toujours décrite par les équations que nous allons exhiber.

Considérons tout d'abord l'équation (a). Multiplions membre à membre par dk et intégrons sur la largeur spectrale Δk_p de la pompe, posons :

$$W_p = \int_{k_{p\inf}}^{k_{psup}} dk W_p(k)$$

Densité d'énergie de la pompe
(VI-B1)

$$W_r = \int_{k_*}^{k_D} dk W_r(k) \quad \text{Densité d'énergie de raréfaction} \quad (\text{VI-B2})$$

$$W_s = \int_{k_*}^{k_D} dk W_s(k) \quad \text{Densité d'énergie sonore due au flux d'ions} \quad (\text{VI-B3})$$

$$W = \int_0^{k_D} dk W(k) \quad \text{Densité d'énergie des ondes de Langmuir} \quad (\text{VI-B4})$$

où nous avons choisi de limiter inférieurement les spectres (VI-B2,3) pour $k = k_*$.

Il vient pour équation d'évolution de W_p .

$$\frac{\partial}{\partial t} W_p = 2 \gamma_{\text{inst}} W_p - \frac{2}{9} \frac{\bar{\gamma}_L}{(k_a \lambda_D)^4} \left[\frac{W_r}{n_0 k_B T} + \frac{W_s}{n_0 k_B T} \right] W_p - 2 \gamma_{\text{sm}} W \quad (\text{VI-B5})$$

où $\bar{\gamma}_L$ est un taux d'absorption Landau moyen typique, k_a est un nombre d'onde caractéristique du spectre et où nous avons utilisé l'égalité (VI-A2).

Procédons d'une manière analogue pour l'équation (b) mais en intégrant de $k = 0$ à $k < k_D$, nous obtenons en utilisant le théorème de la moyenne :

$$\frac{\partial}{\partial t} W = 2 \gamma_{\text{sm}} W - 2 \bar{\gamma}_L W - 2 \nu_* \left(\frac{k'_a}{k_*} \right)^{3/2} (k'_a \lambda_D)^2 W \quad (\text{VI-B6})$$

où le terme de transfert ne donne aucune contribution et où nous considérerons ν_* comme fonction, dépendant du régime établi, de W .

De la même façon les équations (c) et (d) se transforment aisément, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} W_s = 2 \nu_* \left(\frac{R_a'}{R_*} \right)^{3/2} (R_a' \lambda_D)^2 W - 2 \bar{\gamma}_s W_s \quad (\text{VI-B7})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_r = \left(\frac{R_a''}{R_*} \right)^2 \nu_* W_r - 2 \bar{\gamma}_s W_r \quad (\text{VI-B8})$$

De plus dans le cadre des simplifications que nous effectuons, nous pouvons éliminer l'équation (VI-B8), en effet nous avons vu (voir chapitre IV) que $w_r(k)$ variait proportionnellement au carré de $\delta n_r(R)$ or, approximativement dans le cas supersonique et rigoureusement dans le cas subsonique, nous avons $\delta n_r(R) \propto -W(R)$, il en résulte que nous pouvons écrire :

$$W_r \propto \left(\frac{W}{\mu n_0 R_B T} \right)^2 \mu n_0 R_B T \quad (\text{VI-B9})$$

ce qui justifie l'omission de l'équation (VI-B8).

En unités adimensionnées, définies au chapitre II, notre système d'équations (VI-B5,6,7) s'écrit en définitive :

$$\frac{\partial}{\partial t} x = \gamma_0 x - a \gamma_1 (y^2 + z) x - g(x) y \quad (\text{a}')$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y = g(x) y - \gamma_1 y - b g(y) y \quad (\text{b}') \quad (\text{VI-B10})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} z = b g(y) y - \gamma_2 z \quad (\text{c}')$$

où les coefficients a et b ont pour expression :

$$a = \frac{1}{3} \mu \left(\frac{R_D}{R_a} \right)^4 \gg 1 \quad ; \quad b = \left(\frac{3}{\mu} \right)^{3/4} \left(\frac{R_a'}{R_D} \right)^{9/2} < 1$$

et où $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ s'identifient respectivement à $2\gamma_{inst}, 2\bar{\gamma}_L, 2\bar{\gamma}_S$.

Par la suite nous choisirons $g(x) = x$ et $g(y) = y$ et ceci pour faciliter l'analyse. En effet si prendre $g(x) = x^{1/2}$ ou $g(y) = y^{1/2}$ a, d'un point de vue physique, une signification importante (régime supersonique) ce choix aboutit, sur le plan mathématique, à une complication inutile qui, de plus, modifie peu les résultats. Notons aussi que physiquement les ondes sonores (équation (b')) n'existent pas en régime subsonique.

Ainsi nous avons, par une succession de simplification plausibles, transformé notre système spectral (VI-A1) en un petit système dynamique à trois degrés de liberté, ce qui consiste à négliger les variations des nombres d'ondes moyens. Etudions en les propriétés.

C. ETUDE DU SYSTEME DYNAMIQUE.

Introduisons dans l'espace des phases cartésiennes à trois dimensions (x, y, z) le champ de vitesse V de coordonnées (x, y, z) données par le système (VI-B10) et déterminons en les zéros qui en sont des points d'équilibres.

a) Détermination des points fixes.

Hormis le point fixe trivial de coordonnées $(0, 0, 0)$ qui, selon la terminologie, s'identifie à un point col /1/ existe deux autres points fixes de coordonnées $(x_{\pm}, y_{\pm}, z_{\pm})$:

$$y_{\pm} = \left\{ -1 \pm \left[1 + 4a \left(1 + \frac{b}{\gamma_2} \right) \gamma_0 \right]^{1/2} \right\} / 2a \left(1 + \frac{b}{\gamma_2} \right) \quad (\text{VI-C1})$$

$$x_{\pm} = \gamma_1 + b y_{\pm}$$

$$z_{\pm} = b y_{\pm}^2 / \gamma_2$$

Pour des raisons physiques (les quantités que nous considérons sont des grandeurs positives) nous ne sélectionnerons que le point fixe (x_+, y_+, z_+) et par la suite nous omettrons l'indice +. Discutons à présent de la stabilité de cette solution stationnaire.

b) Stabilité du point fixe.

Linéarisons le système (VI-B10) pour de petites perturbations autour de l'état d'équilibre précédent, soit :

$$\begin{aligned}x(t) &= x + \delta x e^{\lambda t} \\y(t) &= y + \delta y e^{\lambda t} \\z(t) &= z + \delta z e^{\lambda t}\end{aligned}\tag{VI-C2}$$

Il en résulte un système d'équations qui s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -x(1+2a\gamma_1 y) & -a\gamma_1 x \\ y & x - \gamma_1 - 2by - \lambda & 0 \\ 0 & 2by & -\gamma_2 - \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}\tag{VI-C3}$$

Les solutions non triviales imposent l'annulation du déterminant associé à la première matrice, il s'en suit l'équation caractéristique $P_3(\lambda)=0$, soit

$$\lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0$$

où les coefficients positifs $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$ s'écrivent :

$$\alpha_0 = [\gamma_2(1+2a\gamma_1 y) + 2ab\gamma_1 y] y x\tag{VI-C4}$$

$$\alpha_1 = [b\gamma_2 + x(1+2a\gamma_1 y)] y$$

$$\alpha_2 = \gamma_2 + by$$

L'analyse de cette équation nous permet de conclure que celle-ci admet pour solutions une racine réelle négative, notée λ_1 , et deux racines complexes conjuguées, notées λ_2 et λ_2^*

Ecrivons $P_3(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_2^*)$ et développons, nous obtenons pour la somme des racines :

$$\lambda_1 + 2 \operatorname{Re} \lambda_2 = -\alpha_2 \quad (\text{VI-C5})$$

Nous déduisons que si :

- $|\lambda_1| < \alpha_2$ alors la partie réelle de λ_2 est négative et le point fixe est stable (point focal)
- $\lambda_1 = -\gamma_2 - b\gamma$ alors $\operatorname{Re} \lambda_2 = 0$ et le point fixe est marginalement stable (point focal)
- $|\lambda_1| > \alpha_2$ alors $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$ et le point fixe est instable (point "saddle focus").

Un tel comportement des racines est caractéristique d'une bifurcation de Hopf [2], le petit paramètre de cette bifurcation étant, essentiellement, a .

D'un point de vue physique ce petit paramètre mesure l'importance du phénomène de conversion. Si la dissipation de l'énergie de la pompe par ce mécanisme reste faible (au sens où l'inégalité $|\lambda_1| > \alpha_2$ n'est pas vérifiée) les densités d'énergie de Langmuir, sonore et de pompage vont, après un régime transitoire, atteindre un nouvel état d'équilibre ; par contre dans le cas où la perte d'énergie de la pompe par ce phénomène ne peut plus être considéré comme négligeable un nouveau régime s'instaure caractérisé par la création d'un cycle limite qui physiquement s'interprète en tant que création de régulières bouffées d'énergie (voir aussi chapitre IV-H).

Avant de poursuivre notre analyse effectuons la remarque suivante :

Puisque la divergence du champ de vitesse \vec{V} ,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2 + x - (1 + 2b + a\gamma_1\gamma) \gamma - a\gamma_1 z \quad (\text{VI-C6})$$

n'est pas nécessairement négative (principalement parce que x et y sont en quadratures) la contraction, dans l'espace des phases, d'un volume v ne peut être assuré. Un tel cas exclu la naissance d'un régime chaotique redevable d'un attracteur étrange /3/.

Nous avons intégré numériquement le système (VI-B10) pour diverses valeurs des paramètres et cette étude confirme notre discussion (voir figure C1), en particulier nous concluons que ce cycle limite reste stable.

D. MODELISATION A 4 DEGRES DE LIBERTE.

Proposons nous d'ajouter un degré de liberté supplémentaire au système d'équations précédentes. Ceci peut être fait en considérant que le spectre de Langmuir se comporte différemment selon que l'on se situe aux grandes échelles ($k < k_*$) ou aux petites et aux échelles intermédiaires ($k > k_*$), le choix de k_* présentant un caractère arbitraire mais néanmoins plausible. L'équation d'évolution (VI-A1b) se scinde en deux parties s'écrivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W(k) &= Q(k) - \frac{\partial}{\partial k} [k V(k) W(k)] - 2 \gamma_{\text{conv}} W(k) & (k < k_*) \\ & & \text{(VI-D1)} \\ \frac{\partial}{\partial t} W(k) &= -\frac{\partial}{\partial k} [k V(k) W(k)] - 2 \gamma_L(k) W(k) - 2 V(k) (k \lambda_D)^2 W(k) \\ & & (k > k_*) \end{aligned}$$

où la signification des divers termes se déduit de la discussion du paragraphe A), posons :

$$W_* = \int_0^{k_*} dk W(k) \quad , \quad W = \int_{k_*}^k dk W(k) \quad \text{(VI-D2)}$$

Appliquons un raisonnement identique au cas précédent, il vient en définitive pour système d'équations (en conservant les mêmes notations) :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \gamma_0 x + a \gamma_1 (y'^2 + z) x - g(x) y$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = g(x) y - g(y) y' - a \gamma_1 (y'^2 + z) y$$

$$\frac{\partial y'}{\partial t} = g(y) y' - \gamma_1 y' - b g(y) y' \quad (\text{VI-D3})$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = b g(y) y' - \gamma_2 z$$

L'intégration numérique de ce système a été effectuée dans le cas entièrement subsonique. Guidé par les résultats du paragraphe précédent nous avons agi sur le petit paramètre a , pour des conditions initiales identiques. Nous avons observé d'irrégulières modulations et avons constaté que le seuil de bifurcation se produisait pour des valeurs de a plus importantes, la remarque précédente concernant la divergence du champ de vitesse demeure valide dans ce cas. Notons que, par suite de la coupure en k_* , le modèle à trois degrés de liberté, englobant la totalité des spectres, semble plus réaliste.

E. TRAITEMENT NUMERIQUE DES SPECTRES.

Afin de déterminer si les modulations observées ne sont pas redevables d'une modélisation trop simplifiée proposons nous d'intégrer les spectres.

Les équations que nous allons considérer décrivent l'évolution :

- De la densité d'énergie W_p de la pompe

$$\frac{\partial}{\partial t} W_p = 2 \gamma_{\text{inst}} W_p - 2 \gamma_{\text{conv}} W_p - \nu(W_p) W_* \quad (\text{VI-E1})$$

- De la densité d'énergie W_* des ondes de Langmuir de 0 à k_*

$$\frac{\partial}{\partial t} W_* = \nu(W_p) W_* - \nu(W_*) W_* - 2 \gamma_{\text{conv}} W_* \quad (\text{VI-E2})$$

- De la densité spectrale d'énergie $W(k)$ des ondes de Langmuir de k_* à $k_D/5$ ou nous négligeons la fraction de puissance gagnée par le spectre d'onde sonore. Pour $k = k_*$ la condition $W(k_*) = \frac{W_*}{k_*}$ a été adoptée

$$\frac{\partial}{\partial t} W(k) = - \frac{\partial}{\partial k} [k \nu(k) W(k)] - 2 \gamma_L(k) W(k) \quad (\text{VI-E3})$$

- De la densité spectrale d'énergie $W_S(k)$ des ondes sonores (équations VI-A1 C).

Initialement nous avons choisi :

$$\gamma_L(k) \sim 0, \quad \nu(k) = \nu_* k^{3/2} \quad \text{pour } k < k_c$$

et

$$\gamma_L(k) = \gamma_c \left(\frac{k}{k_c}\right)^{1/2}, \quad \nu(k) = \nu_* \left(\frac{k}{k_c}\right)^{1/2} \quad \text{pour } k > k_c$$

où initialement $\gamma_c = \nu_*$

et où k_c est un nombre d'onde de coupure que l'on modifie au choix. $\gamma_L(k)$ reste fixe durant l'évolution. Nous avons choisi $k_c \sim 6$ ce qui implique une queue de particules importante. Tout comme précédemment seul le cas subsonique a été envisagé ce qui, nous l'avons expliqué, ne gêne pas le phénomène que nous nous proposons d'observer.

Dans cette étude le rôle du paramètre a est tenu par le taux de conversion γ_{conv} (voir expression IV-H10), deux facteurs y contribuent :

- $W_S(k)$ qui suit l'équation d'évolution (VI-A1 C) et que l'on ne peut donc pas sélectionner à son gré,

- $\gamma_L(k)$ que l'on peut aisément modifier en fixant l'amplitude de γ_c .

En définitive et pour la modélisation que nous effectuons il s'en suit que γ_c tiendra le rôle, pour k_c fixé, de paramètre numérique de bifurcation.

Initialement les spectres relaxés ont été injectés, $W_p = 3$. La méthode numérique employée est identique à celle du chapitre V, sauf pour le calcul des intégrales qui ont été calculées par la méthode des trapèzes corrigée /4/.

- Pour $\gamma_c = 0.4$ nous avons observé une relaxation des diverses grandeurs après un régime transitoire oscillant.

- Pour $\gamma_c = 0.8$ (voir figure C2) un pic important se manifeste, suivi par une stabilisation.

Suite à des difficultés numériques il ne nous a pas été possible de poursuivre pour des valeurs de γ_c plus importantes pouvant, on peut l'espérer sur la base des résultats à $\gamma_c = 0.8$, conduire à un régime intermittent par ailleurs sur la base de la modélisation des petits systèmes à 3 ou 4 degrés de liberté l'existence d'un tel régime semble plausible.

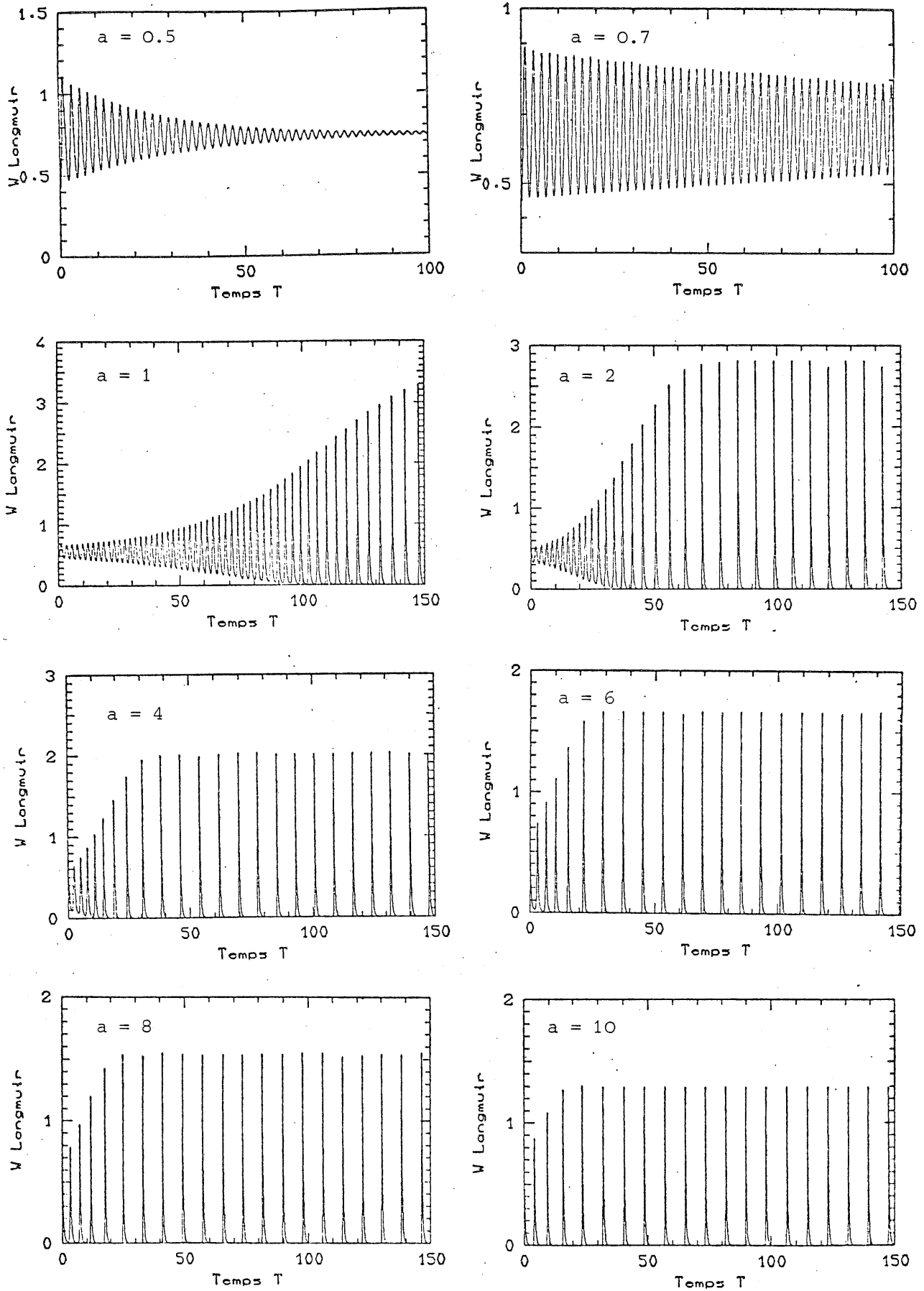


Figure C1 : Evolution de la densité d'énergie des ondes de Langmuir (y) en fonction du paramètre a . Les conditions initiales sont : $\gamma_0 = 2$, $\gamma_1 = 3$, $\gamma_2 = 1$, $b = 0.5$, $x = 3$, $y = 0.5$, $z = 0.1$

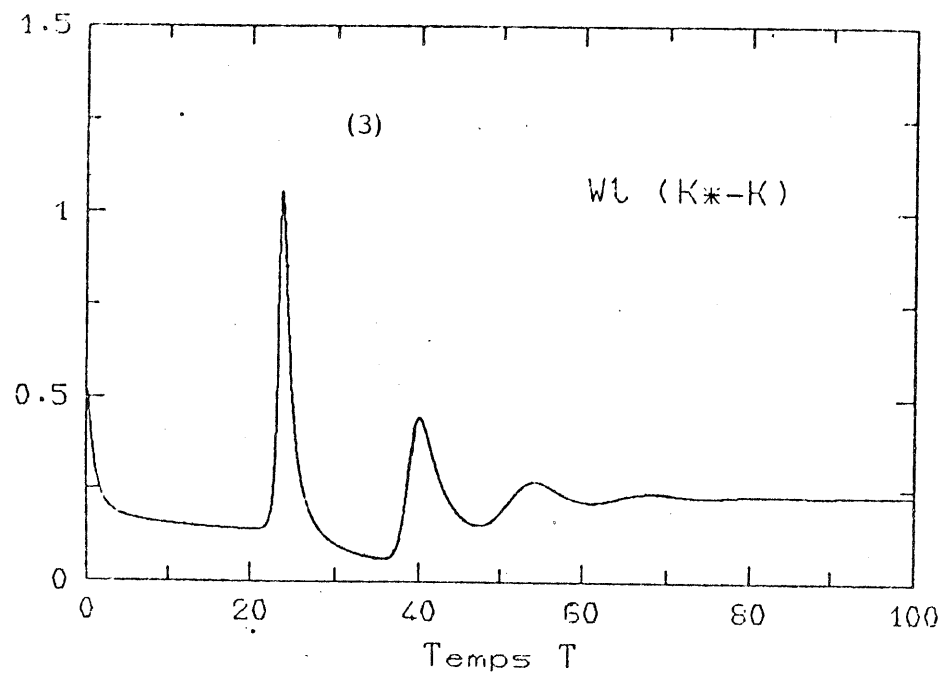
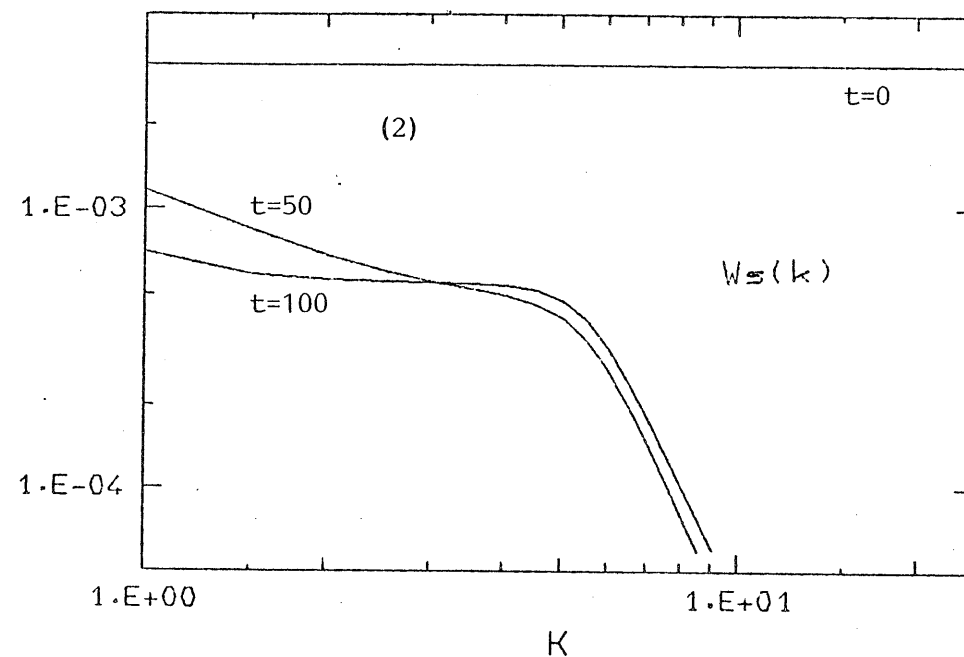
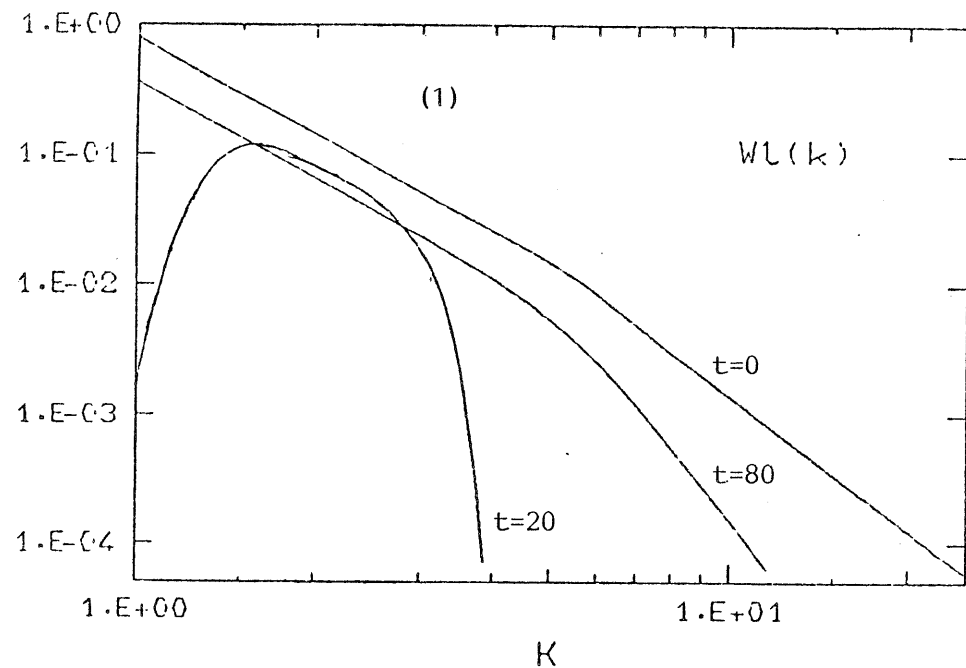
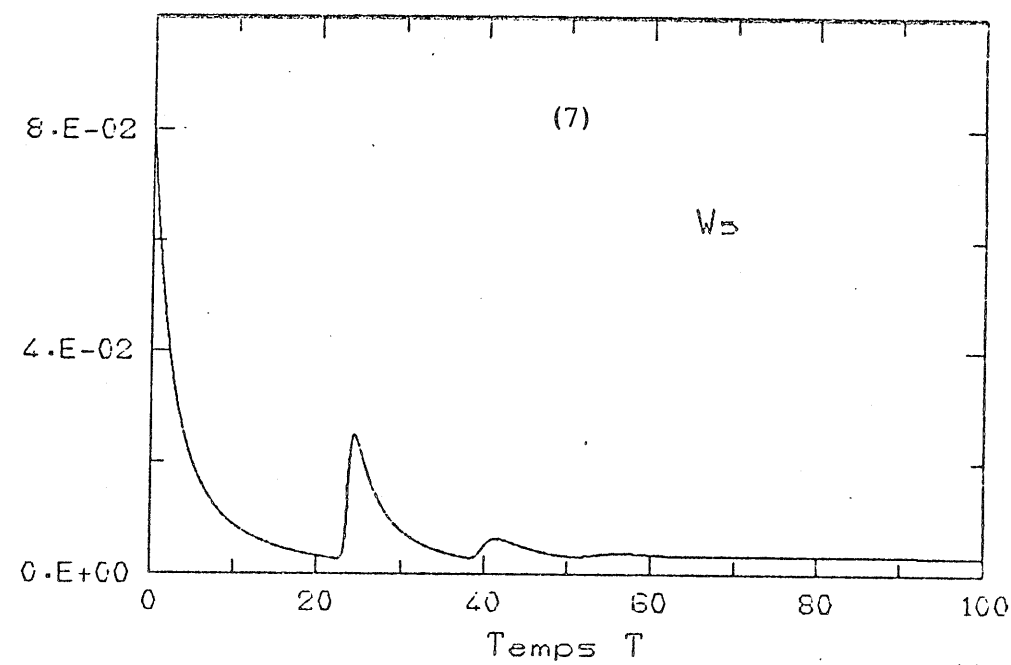
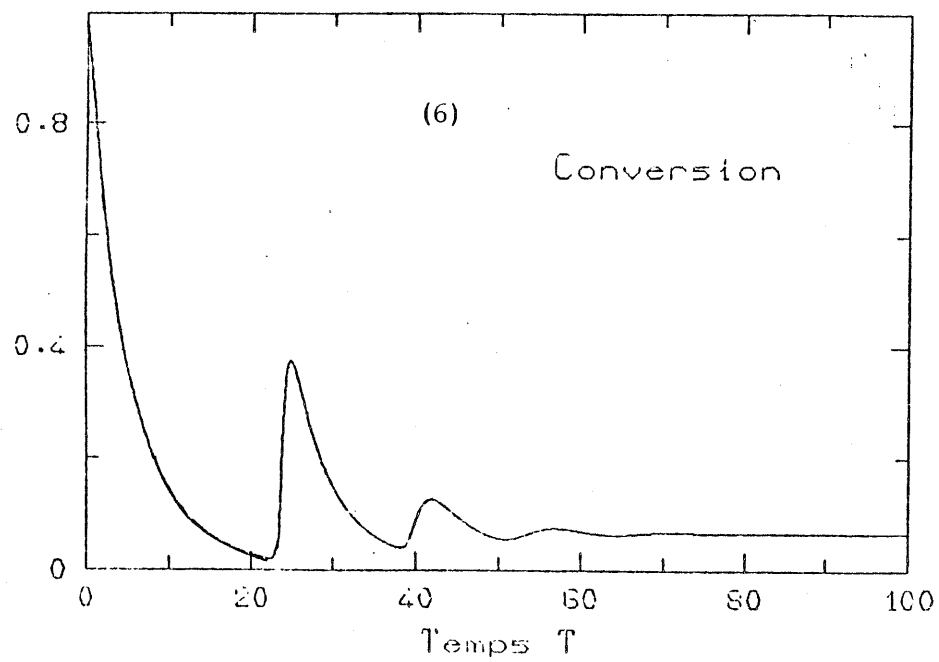
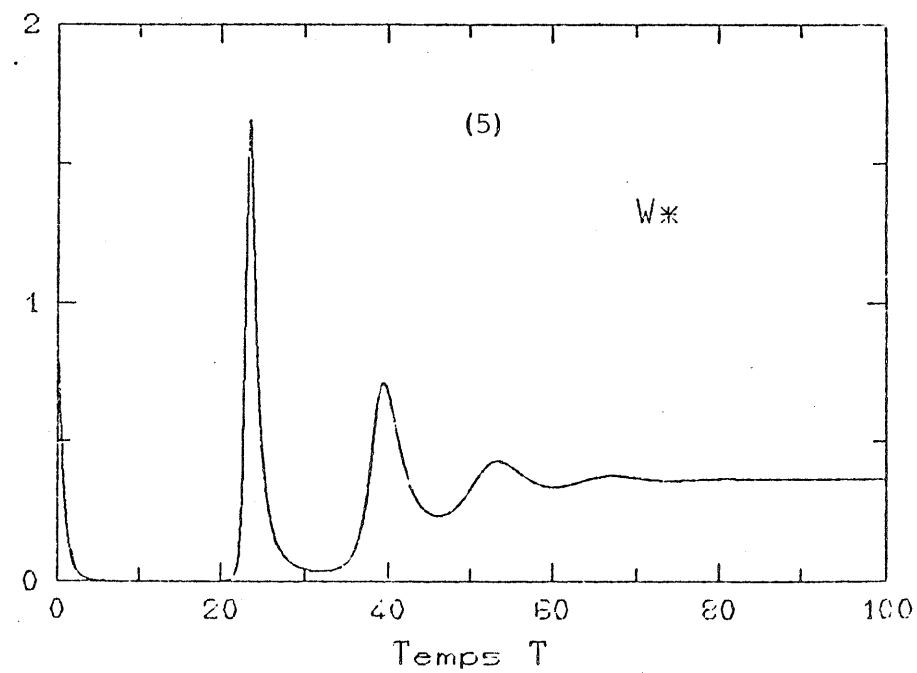
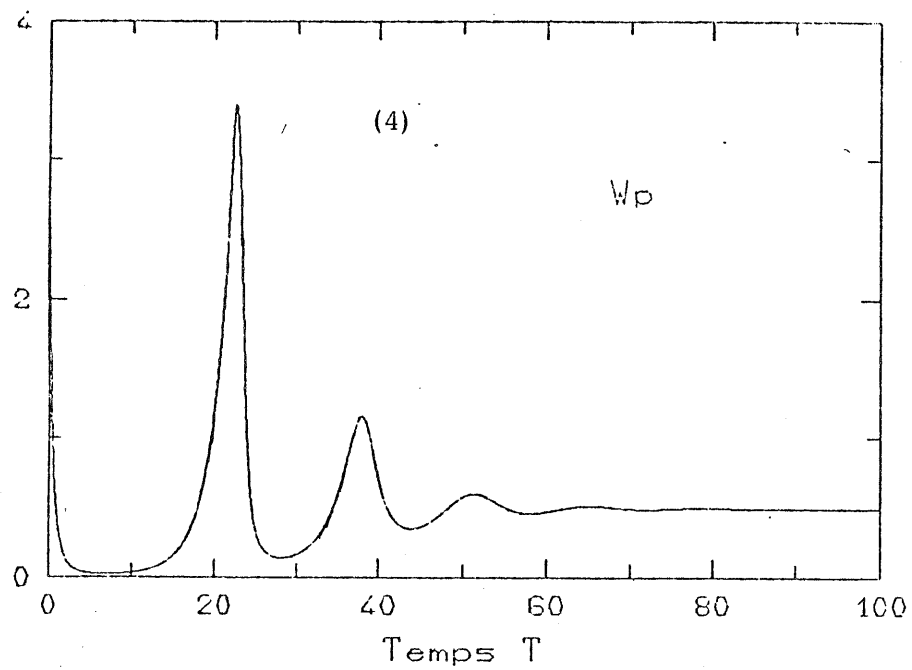


Figure C2. Evolution temporelle des diverses quantités
($W_p=3.$, $\gamma_c=0.8$) :

- (1) Spectre d'ondes de Langmuir
- (2) Spectre d'ondes sonores
- (3) Densité d'énergie des ondes de Langmuir de k_* à k
- (4) Densité d'énergie de la pompe
- (5) Densité d'énergie des ondes de Langmuir de 0 à k_*
- (6) Taux de conversion
- (7) Densité d'énergie des ondes sonores.



R E F E R E N C E S

- 1 - H. HAKEN, "Synergetics", Springer - Verlag (1980)
- 2 - A. RUSSEL, E. OH, Physics of Fluids, 24, 1976, 1981
- 3 - E. OH, Reviews of Modern Physics, 53, 655, 1981
- 4 - DE BOOR, "Elementary numerical analysis", Mc Graw Hill (1982)

C O N C L U S I O N

=====

Après avoir rappelé le rôle important de la turbulence de Langmuir dans de nombreux phénomènes physiques et exhibés, à l'aide d'une description lagrangienne, les taux de croissance d' l'instabilité d'automodulation nous avons montré qu'il était possible, en adoptant un traitement statistique sur un ensemble de cavités en effondrement créé par automodulation, de modéliser le régime de turbulence forte par un système d'équations cinétiques décrivant :

- L'évolution du spectre de Langmuir des cavités se dissipant d'une part par effet Landau d'autre part en rayonnant des ondes sonores.

- L'évolution du spectre d'ondes sonores généré à la fois par le flux d'ions expulsés des cavités en contraction ainsi que par les inhomogénéités de densité constituées par les cavités. Ce spectre est également dissipé par effet Landau.

- L'évolution de la fonction de distribution des particules dans l'hypothèse quasi-linéaire.

Tout d'abord, en négligeant la fraction de puissance perdue par le spectre de Langmuir et gagnée par le spectre d'ondes sonores, il a été prédit, essentiellement, la formation d'une queue de particules. Cette queue supra-thermique a été confirmée numériquement bien que la loi de puissance asymptotique attendue ne soit pas observée et ceci parce que l'évolution n'atteignait jamais un régime quasi-stationnaire.

Ensuite il a été montré que, à cause de l'existence du phénomène non linéaire de conversion, les ondes sonores se manifestaient par une réaction sur la source même de la turbulence, réaction d'autant plus sensible que la queue de particules était étendue. Nous avons conclu que cette réaction pouvait conduire à un régime irrégulier. Pour nous assurer de cette conclusion nous avons dans un premier temps étudié ce problème sous sa formulation la plus

simple consistant à décrire l'évolution globale des trois spectres intégrés : le spectre d'ondes sonores, le spectre de Langmuir, la pompe (engendrée par une instabilité). Une bifurcation de Hopf conduisant à un cycle limite stable a été trouvée, le paramètre de la bifurcation étant fonction du taux de conversion. Une modélisation à quatre degrés de liberté, en tronquant le spectre de Langmuir, a été effectuée, néanmoins cette procédure apparaissant peu claire nous avons intégré le système spectral dans son ensemble. Cette intégration nous a permis de suspecter légitimement l'apparition d'un régime irrégulier, néanmoins des difficultés d'ordre numérique n'ont pu nous permettre d'exhiber le régime supercritique.

Terminons en concluant que les études sur ce sujet sont susceptibles d'améliorations, par exemple qu'en est-il lorsque les cavités interagissant par l'intermédiaire du flux d'ions expulsés ?

APPENDICE A

Nous allons rappeler dans cet appendice quelques définitions et formules mathématiques utiles pour notre exposé, nous ne chercherons pas à donner des définitions rigoureuses au sens mathématiques ou on l'entend.

I - Transformée de Fourier.

Nous définirons la transformée de Fourier $f(\vec{k}, \omega)$ d'une fonction $f(\vec{r}, t)$ comme :

$$f(\vec{k}, \omega) = \iiint_{\mathbb{R}^{d+1}} dt d\vec{x}^d f(\vec{r}, t) \exp[-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \quad (1)$$

où $d\vec{x}^d$ est l'élément de volume en dimension d .

La transformée de Fourier inverse s'écrit :

$$f(\vec{r}, t) = \iiint_{\mathbb{R}^{d+1}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} f(\vec{k}, \omega) \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \quad (2)$$

Nous avons utilisé les propriétés suivantes :

- Si $f(\vec{r}, t)$ est réel alors $f(\vec{k}, \omega)$ satisfait : $f(\vec{k}, \omega) = f^*(-\vec{k}, -\omega)$
- Théorème de la puissance ou formule de Parseval :

$$\iiint_{\mathbb{R}^{d+1}} dt d\vec{x}^d |f(\vec{r}, t)|^2 = \iiint_{\mathbb{R}^{d+1}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} |f(\vec{k}, \omega)|^2 \quad (3)$$

II - Fonction Delta de Dirac.

Nous poserons par définition :

$$\delta(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} d\vec{x} \exp[\pm i \vec{k} \cdot \vec{r}] \quad (4)$$

Rappelons les propriétés utilisées :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi \delta(\vec{x}) \quad (5)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x) \delta(x-a) = \begin{cases} f(a) & \text{si } x_1 \leq a \leq x_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (6)$$

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_i \frac{1}{|\varphi'(a_i)|} \delta(x-a_i) \quad (7)$$

$\varphi(x)$ étant une fonction uniforme, les a_i les racines de l'équation

$\varphi(x) = 0$ et $\varphi'(x)$ la dérivée de $\varphi(x)$ par rapport à x .

III - Théorème de la moyenne.

Soit $g(x)$ une fonction intégrable d'un même signe sur un intervalle (a,b) . Si $f(x)$ est continue sur (a,b) alors il existe ξ appartenant à l'intervalle (a,b) tel que :

$$\int_a^b dx f(x) g(x) = f(\xi) \int_a^b dx g(x) \quad (8)$$

ξ est proche de la valeur de x pour laquelle $|g|$ est maximum.

APPENDICE B

Réécrivons nos équations :

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\xi, \varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial \xi} [\dot{\xi} P(\xi, \varepsilon)] - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [\dot{\varepsilon} P(\xi, \varepsilon)] \quad (1)$$

avec

$$\dot{\xi} \equiv \frac{\partial \xi}{\partial t} = f(\xi, \varepsilon) = -a \varepsilon^{1/2} \xi^{1-\frac{d}{2}} \quad (2)$$

$$\dot{\varepsilon} \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = g(\xi, \varepsilon) = -2 \gamma(\xi) \varepsilon \quad (3)$$

a) Invariant du système (2,3)

Soit I un invariant du système (2,3), exprimons la conservation du temps, il vient :

$$\frac{d\xi}{a \varepsilon^{1/2} \xi^{1-\frac{d}{2}}} = \frac{d\varepsilon}{2 \gamma(\xi) \varepsilon} \quad (4)$$

Intégrons cette équation, nous obtenons :

$$I = \varepsilon^{1/2} - \frac{1}{a} \int d\xi \gamma(\xi) \xi^{\frac{d}{2}-1} \quad (5)$$

L'invariant I vérifie l'équation :

$$\dot{\xi} \frac{\partial I}{\partial \xi} + \dot{\varepsilon} \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (6)$$

b) Résolution de (1) dans le cas quasi-stationnaire.

(1) s'écrit dans le cas quasi-stationnaire, en posant par commodité d'écriture : $P \equiv P(\xi, \varepsilon)$; $f \equiv f(\xi, \varepsilon)$; $g \equiv g(\xi, \varepsilon)$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(f P) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(g P) = 0 \quad (7)$$

Soit Q une solution particulière de (7), posons $P = QR$, R satisfait alors à l'équation :

$$f \frac{\partial}{\partial \xi} R + g \frac{\partial}{\partial \varepsilon} R = 0 \quad (8)$$

Comparons (8) et (6) d'où R est une fonction de l'invariant I :

$$R = \varphi(I) \quad (9)$$

Il faut maintenant trouver la solution particulière Q vérifiant :

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(f Q) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(g Q) = 0 \quad (10)$$

On peut s'assurer que $Q(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \xi^{\frac{d}{2}-1}$ vérifie l'équation (10). La solution $P(\xi, \varepsilon)$ est donc :

$$P(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \xi^{\frac{d}{2}-1} \varphi(I) \quad (11)$$

APPENDICE C

1) Calcul de $\gamma(k)$

Injectons l'expression du taux d'émission $U(k, \vec{v})$ dans la formule donnant le coefficient d'absorption Landau $\gamma(k)$

$$\gamma(k) = -\frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pe}^3}{k^2} \int_{\mathbb{R}^d} d\vec{v} \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{v} \frac{\partial}{\partial v} f(v) \delta(\omega_{pe} - \vec{k} \cdot \vec{v}) \quad (1)$$

Utilisons l'hypothèse d'isotropie et soit, pour $d = 3$, θ l'angle formé par \vec{k} et \vec{v}

$$\gamma(k) = -\frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pe}^3}{k} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dv v^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{\partial}{\partial v} f(v) \cos\theta \delta(\omega_{pe} - kv \cos\theta) \quad (2)$$

Remarquons la propriété de la fonction delta :

$$\delta(\omega_{pe} - kv \cos\theta) = \frac{1}{kv} \delta(\cos\theta - \frac{\omega_{pe}}{kv}) \quad (3)$$

L'intégration sur la variable angulaire φ est triviale, la seule difficulté est l'intégration sur la variable angulaire θ . Posons $x = \cos\theta$ d'où $dx = -\sin\theta d\theta$, l'intégrale sur θ s'écrit :

$$\int_{-1}^{+1} dx x \delta(x - \frac{\omega_{pe}}{kv}) = \frac{\omega_{pe}}{kv}$$

Alors

$$\gamma(k) = -\pi^2 \frac{\omega_{pe}^4}{k^3} \int_{v \geq \frac{\omega_{pe}}{k}}^\infty dv \frac{\partial}{\partial v} f(v) = \pi^2 \left[v^3 f(v) \right]_{v=\frac{\omega_{pe}}{k}} \frac{\omega_{pe}}{k} \quad (4)$$

2) Calcul de D(v)

Procédons de la même manière que précédemment soit :

$$D(v) = \pi m_e \omega_{pe}^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3} N(k) k \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos^2\theta \delta\left(\frac{\omega_{pe}}{kv} - \cos\theta\right) \quad (5)$$

Traisons l'intégrale sur la variable angulaire θ de la même façon qu'en 1) d'où :

$$D(v) = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pe}^4}{n_0 m_e} \frac{1}{v^3} \int_{k > \frac{\omega_{pe}}{v}}^\infty dk k^{-3} W(k) \quad (6)$$

où nous avons posé : $4\pi k^2 \hbar \omega_{pe} N(k) = (2\pi)^3 W(k) \quad (7)$

APPENDICE D

I - Calcul de γ^{NL} dans le cas $T_e \gg T_i$.

Dans ce cas nous avons $\gamma_s(k'') \approx 0$. Considérons l'expression (II-B9) de γ^{NL} et utilisons la relation (voir appendice A) :

$$\lim_{\gamma_s(k'') \rightarrow 0} \frac{2 \Delta \omega_e \gamma_s(k'')}{[\Delta \omega_e^2 - \omega_s^2(k'')]^2 + 4 \Delta \omega_e^2 \gamma_s(k'')} = \pi \delta[\Delta \omega_e^2 - \omega_s^2(k'')] \quad (1)$$

Les propriétés de la fonction de Dirac nous permettent d'écrire :

$$\pi \delta[\Delta \omega_e^2 - \omega_s^2(k'')] = \frac{\pi}{2 \Delta \omega_e} \left\{ \delta[\Delta \omega_e - \omega_s(k'')] - \delta[\Delta \omega_e + \omega_s(k'')] \right\} \quad (2)$$

Utilisant ce résultat nous obtenons sans difficulté l'expression (II-B15) de γ^{NL} .

II - Calcul de γ^{NL} dans le cas $k \sim k' \sim k^*$.

Remarquons que $\omega_s(k'')$ est petit face à $\Delta \omega_1$, nous pouvons alors utiliser la définition de la dérivée d'une fonction et faire l'approximation :

$$\delta[\Delta \omega_e - \omega_s(k'')] - \delta[\Delta \omega_e + \omega_s(k'')] \simeq -2 \omega_s(k'') \frac{\partial \delta(\Delta \omega_e)}{\partial \Delta \omega_e} \quad (3)$$

Soit d'après les propriétés de la fonction de Dirac :

$$-2 \omega_s(k'') \frac{\partial \delta(\Delta \omega_e)}{\partial \Delta \omega_e} = \frac{2 k_*^2}{c_s} \frac{k''}{k k'} \frac{\partial}{\partial k'} [\delta(k - k') - \delta(k + k')] \quad (4)$$

L'expression (II-B15) se réduit alors, en tenant compte des conditions de résonance (II-B16), à :

$$\gamma^{NL} = \frac{\pi}{2} \omega_{pe} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^d} \frac{(k_* k')^2}{k k'} \frac{\partial}{\partial k'} [S(k-k') - S(k+k')] \cos^2 \theta \frac{\epsilon_0 \langle E_0 E_0 \rangle k'}{2 n_0 k_B T} \quad (5)$$

où θ est l'angle formé entre les nombres d'ondes \vec{k} et \vec{k}' .

Soit sous l'hypothèse d'isotropie et en dimension $d = 3$
 $(d\vec{k}' \rightarrow d\theta d\varphi d k' k'^2 \sin \theta)$

$$\gamma^{NL} = \frac{\pi}{6} \omega_{pe} k_*^2 \int_0^\infty d k' \frac{W(k')}{n_0 k_B T} \frac{k^2 + k'^2}{k k'} \frac{\partial}{\partial k'} [S(k-k') + S(k+k')] \quad (6)$$

ou nous avons posé pour la densité d'énergie du champ de Langmuir $W(k')$

$$(2\pi)^3 W(k') = 2\pi k'^2 \epsilon_0 \langle E_0 E_0 \rangle_{k'} \quad (7)$$

Une intégration par partie immédiate de l'expression (6) donne le résultat (II-B19).

III - Calcul de γ^{NL} dans le cas $k < k^*$ et $k' > k^*$.

L'angle formé par les nombres d'ondes \vec{k}'' et $(\vec{k} + \vec{k}')/2$ est de l'ordre de π , la condition de résonance (II-B17) devient avec $\cos \approx -1$

$$2 k^* = - \vec{k} + \vec{k}' \quad (8)$$

Nous en déduisons que seule la résonnance définie par :

$$\vec{k} - \vec{k}' = -\vec{k}'' \quad \text{et} \quad \omega_1(k) - \omega_1(k') = -\omega_s(k'') \quad (9)$$

est possible et l'expression (II-B15) de γ^{NL} se réduit à :

$$\gamma^{NL} = \frac{\pi}{2} \omega_{pe} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^d} \frac{\omega_s^2(k'')}{\Delta\omega_e} \frac{\epsilon_0 \langle E_0 E_0 \rangle k'}{2n_0 k_B T} \cos^2 \theta \delta[\Delta\omega_e + \omega_s(k'')] \quad (10)$$

D'après les propriétés de la fonction de Dirac nous pouvons écrire :

$$\delta[\Delta\omega_e + \omega_s(k'')] = \frac{2k_*}{c_s} \delta[k'^2 - k^2 - 2k_* k''] \quad (11)$$

De la condition (9) et pour la gamme des nombres d'ondes étudiée, nous avons :

$$k'' \simeq k' - k \cos \theta \quad (12)$$

A l'aide de (12) réécrivons l'argument de la fonction δ sous la forme

$$(k' - k'_-) (k' - k'_+)$$

$$\text{où} \quad k'_+ \simeq 2k_* - k \cos \theta \quad (13)$$

$$k'_- \simeq k \cos \theta \quad \text{viole l'hypothèse } k < k_* \text{ et } k' > k_*$$

La résonnance ne pourra avoir lieu que pour $k' = k'_+$, il vient alors pour l'expression (11)

$$\frac{c_s}{2k_*} \delta[\Delta\omega_e + \omega_s(k'')] = \delta[(k' - k'_-)(k' - k'_+)] = \frac{\delta(k' - k'_+)}{2(k'_+ - k_*)} \quad (14)$$

Approximons k'_+ par $2k_*$, plaçons nous dans le cas isotrope et en dimension $d = 3$, l'intégration de l'expression (10) ne pose pas de problème particulier et nous obtenons l'équation (II-B23).

APPENDICE E

Soit \vec{u} la vitesse de dérive des électrons par rapport aux ions et ν^* la fréquence des collisions des électrons sur la turbulence nous avons :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\nu^* \vec{u} \quad (1)$$

L'expression générale de ν^* peut être déduite comme suit :
Considérons l'équation de Vlasov décrivant la fonction de distribution électronique f :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} - \frac{e}{m_e} \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right] f = 0 \quad (2)$$

Ecrivons que f et le champ électrostatique auto-consistant \vec{E} se décompose en une partie moyenne et une partie fluctuante :

$$f = \langle f \rangle + \delta f \quad ; \quad \vec{E} = \langle \vec{E} \rangle + \delta \vec{E} \quad (3)$$

Moyennons l'équation de Vlasov il vient :

$$\frac{d}{dt} \langle f \rangle = \frac{e}{m_e} \langle \delta \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \delta f \rangle \quad (4)$$

Par ailleurs, d'un point de vue fluide, la vitesse \vec{u} se définit comme :

$$\vec{u} = \int d\vec{v} \langle f \rangle \vec{v} \quad (5)$$

d'où

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{1}{m_e n_0} \langle \delta \vec{E} \cdot \delta \rho \rangle \quad (6)$$

où la perturbation de densité $\delta \rho$ s'écrit :

$$\delta \rho = -n_0 e \int d\vec{v} \delta f \quad (7)$$

D'autre part $\delta\rho$ étant induit par les fluctuations $\vec{\delta E}$ du champ, nous pouvons écrire :

$$\delta\rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\delta p} = -\vec{\nabla} \cdot [\epsilon_0 \vec{\chi} \cdot \vec{\delta E}] \quad (8)$$

où $\vec{\chi}$ est le tenseur de susceptibilité.

Injectons l'expression (7) de $\delta\rho$ dans la formule (6), prenons la transformée de Fourier du membre de droite de (6) ; dans l'hypothèse des phases aléatoires ;

$$\langle \vec{\delta E}(\vec{x}) \otimes \vec{\delta E}(\vec{x}') \rangle = (2\pi)^{d+1} \delta(\vec{x} + \vec{x}') \vec{S}(\vec{x}) \quad (9)$$

où la fonction paire $S_{ij}(\vec{x})$ est le spectre de corrélation du champ.

Nous obtenons :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\epsilon_0}{m_e n_0} \int \frac{d\vec{x}}{(2\pi)^{d+1}} \vec{k} \text{Im} \vec{\chi}(\vec{x}) : \vec{S}(\vec{x}) \quad (10)$$

L'expression ci-dessus est tout-à-fait générale, appliquons là à notre cas où la turbulence ionique est excitée soit :

$$\vec{S}(\vec{x}) = 2\pi \vec{\pi}_e \delta(\omega - \omega_s(k)) S^s(k) \quad (11)$$

$\vec{\pi}_e$ est le projecteur longitudinal et $\omega_s(k) \simeq k c_s$

Par ailleurs l'expression de $\text{Im} \vec{\chi}(\vec{x})$ dans le cas d'une turbulence ionique est bien connue (dans l'approximation linéaire) (voir référence /5/ du chapitre IV) :

$$\text{Im} \chi(\vec{x}) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{k_\perp}{k}\right)^2 \frac{\omega - \vec{k} \cdot \vec{u}}{k v_{Te}} \quad (12)$$

Il vient alors, pour des raisons de parité :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = - \left\{ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \omega_{pe} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{W^s(\vec{k})}{n_0 k_B T} \frac{k_\perp}{k} \frac{\vec{k} \otimes \vec{k}}{k^2} \right\} \vec{u} \quad (13)$$

où nous avons posé, dans le cas d'une turbulence ionique :

$$W^S(\vec{R}) = \varepsilon_0 S^S(\vec{R}) \quad (14)$$

Comparons les expressions (13) et (1) il est facile d'identifier γ^* si de plus nous nous plaçons dans le cas isotrope nous obtenons l'expression (IV-F1) :

où

$$W^S(R) = \frac{4\pi R^2 W^S(\vec{R})}{(2\pi)^3} \quad (15)$$

APPENDICE F.

Dans le but d'étudier la validité de la méthode numérique employée proposons nous, à titre de test, d'intégrer, en dimension $d = 1$, le système d'équations couplant la fonction de distribution $f(v)$, décrite par une équation du type Fokker-Planck, et l'équation d'évolution de la densité spectrale d'énergie $\mathcal{E}(k)$ des plasmons /1/, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v) = \frac{\partial}{\partial v} \left[F f(v) + D(v) \frac{\partial}{\partial v} f(v) \right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}(k) = C(k) + 2 \gamma_L(k) \mathcal{E}(k) \quad (2)$$

où le temps t est réduit par rapport à ω_{pe}^{-1} , les longueurs par rapport à λ_D , les vitesses par rapport à v_{Te} et les densités d'énergie par rapport à $n_0 k_B T$, par ailleurs nous avons pour expression :

- Du coefficient d'absorption Landau $\gamma_L(k)$:

$$\gamma_L(k) = \frac{\pi}{2} k^{-2} \left[\frac{\partial}{\partial v} f(v) \right]_{v=1/k}$$

- Du coefficient d'émission spontanée $C(k)$:

$$C(k) = \frac{\pi^2}{2} \mathcal{E}_p f(1/k) / k^3$$

- Du coefficient de diffusion $D(v)$:

$$D(v) = 2 \mathcal{E}(k) / v$$

- Du terme de Friction F

$$F = \pi \mathcal{E}_p$$

où \mathcal{E}_p est le petit paramètre plasma (nous prendrons $\mathcal{E}_p = 10^{-4}$).

L'espace des vitesses v ($v = 1/k$) est maillé à l'aide de $N = 80$ points équidistants dans un intervalle $v_{\text{Max}} = 8$, $v_{\text{Min}} = 1$.

Initialement la fonction de distribution sera choisie avec une bosse (faisceau de particules) centrée en $v = 6$, la fraction α de particules sera prise égale à $\alpha = 10^{-3}$.

Le spectre initial des plasmons sera, loin du domaine de résonance, celui de l'équilibre thermodynamique.

Sous ces conditions la théorie prévoit la disparition de la bosse et la formation d'un plateau pour la fonction de distribution, le spectre pour sa part croît dans une gamme d'onde correspondant à la région de pente positive de la fonction de distribution, par ailleurs la densité d'énergie turbulente tend à se saturer à une valeur de l'ordre de α au cours du temps.

L'intégration numérique du système (1,2) où les dérivées spatiales sont calculées par des fonctions splines cubiques et où l'intégration temporelle est effectuée à l'aide d'un schéma basé sur l'extrapolation de Richardson avec sélecteur automatique du pas d'intégration ($\text{EPS} = 10^{-3}$) confirme bien la théorie (voir figure F1).

Pour s'assurer de la précision de la méthode nous avons calculé les erreurs, en pourcentage, sur deux quantités qui doivent se conserver durant l'évolution :

- La densité de particules n , telle que :

$$n = \int_{v_{\text{min}}}^{v_{\text{max}}} dv f(v)$$

- L'énergie totale du système E , telle que :

$$E = \frac{1}{2} \int_{v_{\text{min}}}^{v_{\text{max}}} dv v^2 f(v) + \frac{2}{\pi} \int_{k_{\text{min}}}^{k_{\text{max}}} dk E(k)$$

Ces trois intégrales sont calculées par la méthode dite des trapèzes corrigée /2/.

Précisons que l'erreur a été définie, par exemple pour la densité n , comme :

$$\frac{n(t) - n(t_0)}{n(t_0)} \times 100$$

$n(t)$ étant la valeur de la densité à l'instant t , $n(t_0)$ la valeur à l'instant initial.

Nous constatons (voir figure F2) que la méthode utilisée donne une précision excellente dans les deux cas (nous pouvons, faute de détail, la considérer bien meilleure que dans la référence /1/ et ceci pour un maillage bien moins dense, en /1/ $N \simeq 300$).

Sur la base de ces résultats nous concluons que l'utilisation de cette méthode numérique, s'avère précise, peu coûteuse et facile à mettre en oeuvre.

/1/ Rimbault J.C., Thèse de Troisième Cycle, Grenoble I (1981)

/2/ Conte S.D., De Boor C., Elementary numerical Analysis, Mc Graw-Hill (1982)

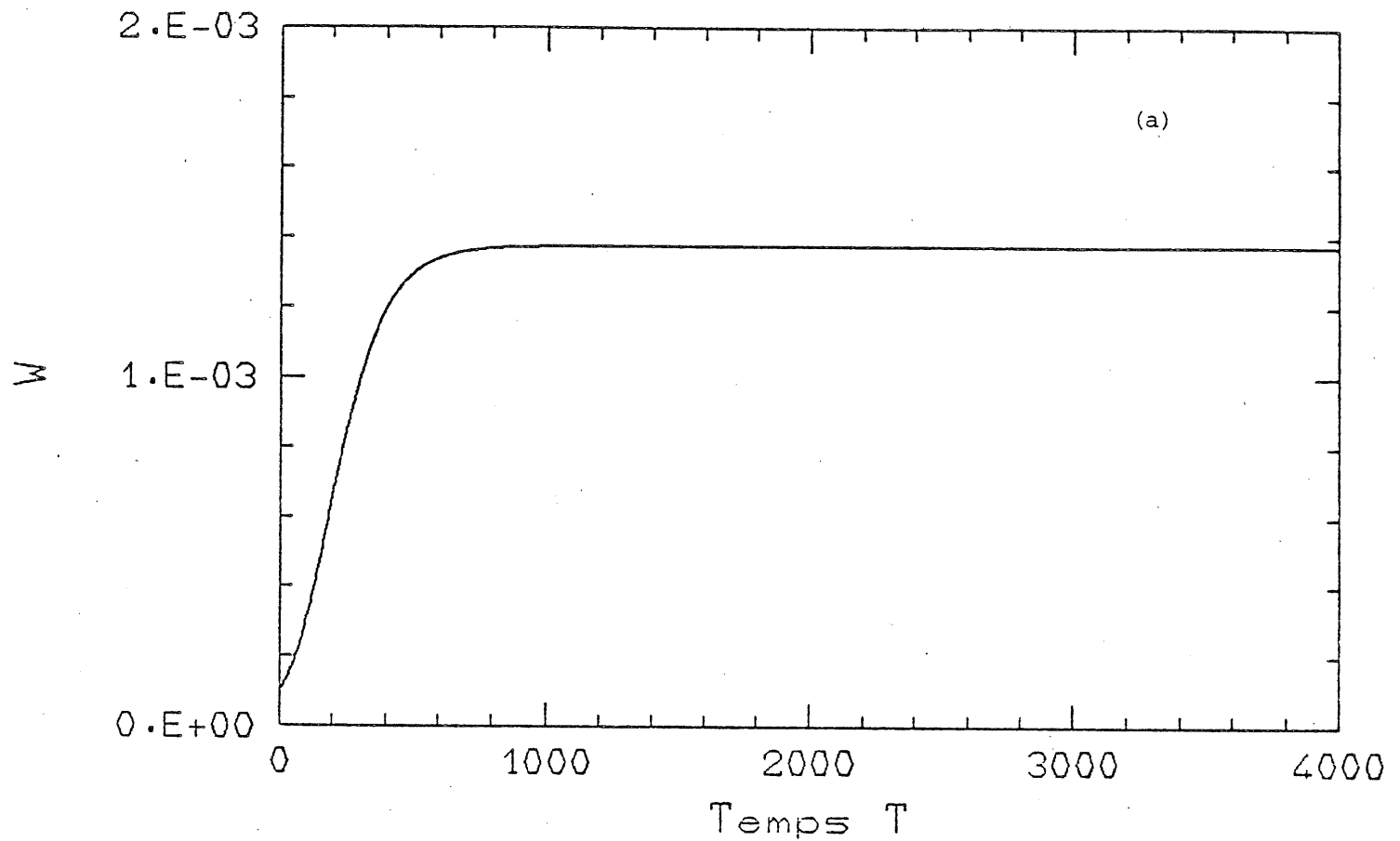


FIGURE F1 - Evolution temporelle :

- (a) de la densité d'énergie turbulente ; la saturation a lieu pour $t \sim 900$ ce qui correspond à $W \sim 1.4 \cdot 10^{-3} \sim \alpha$.
- (b) de la fonction de distribution $f(v)$ des particules. On voit clairement la déformation progressive de celle-ci jusqu'à la formation du plateau.
- (c) du spectre d'énergie des plasmons. Celui-ci croît et s'élargit progressivement dans la région de résonance.

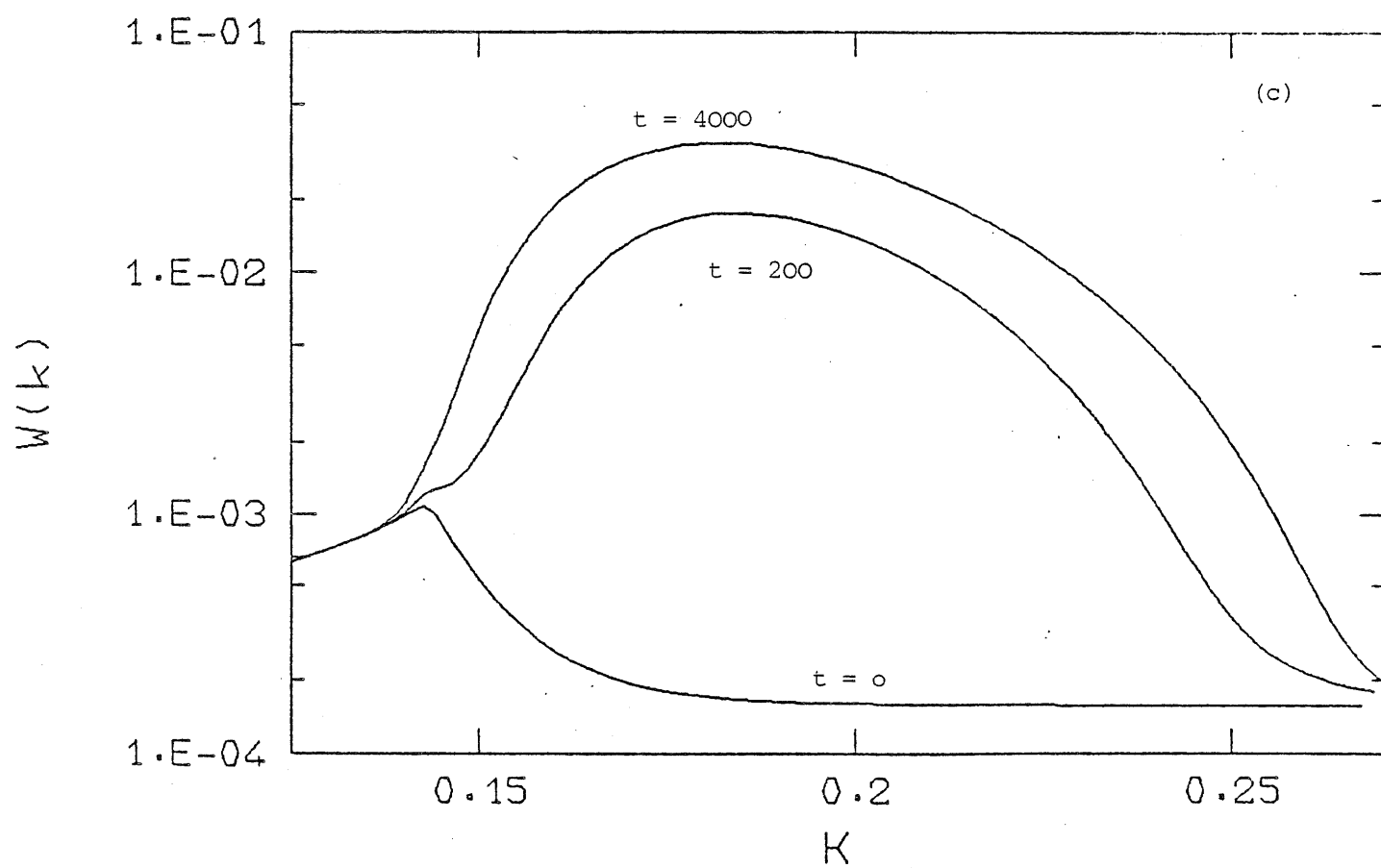
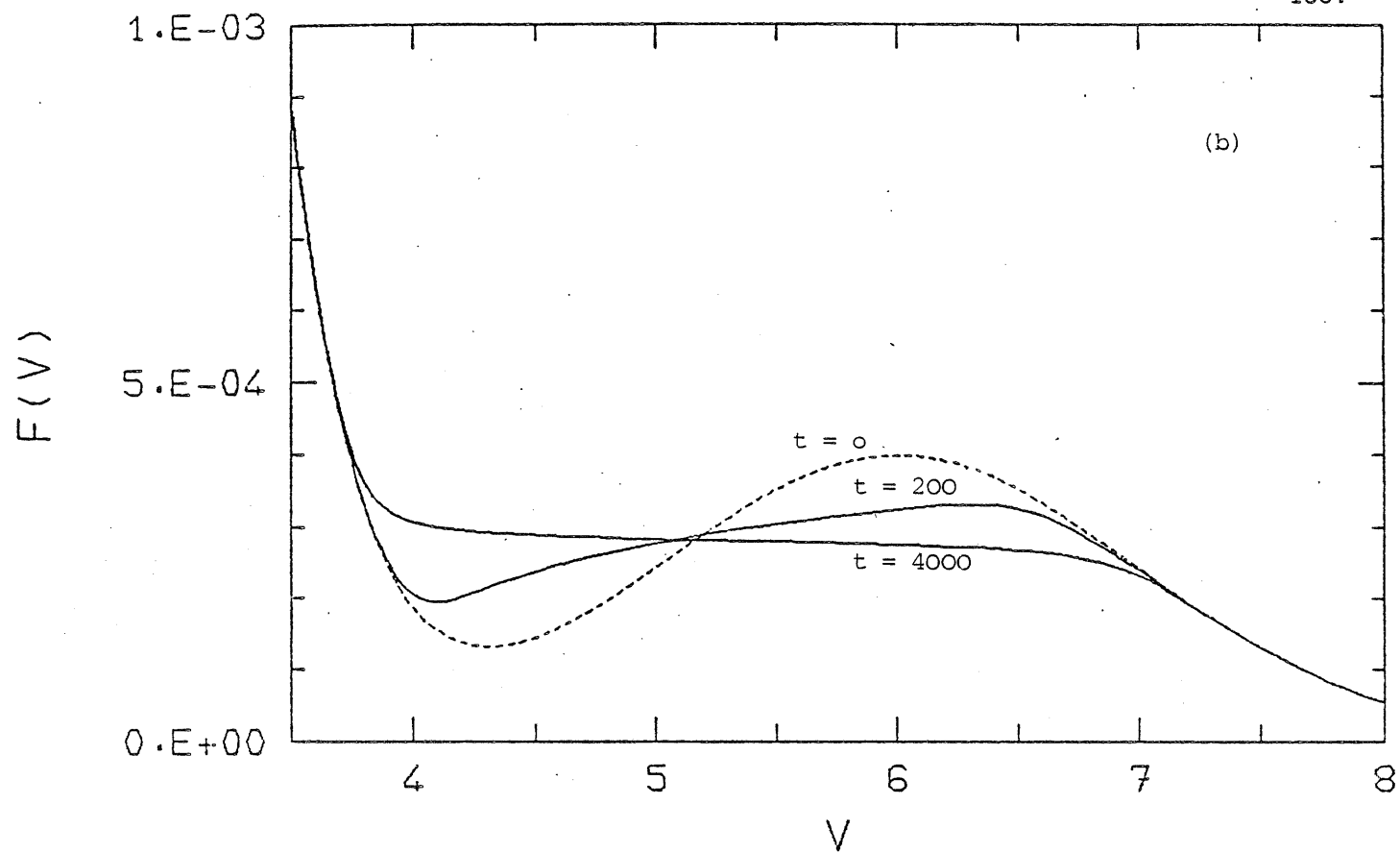


FIGURE F1

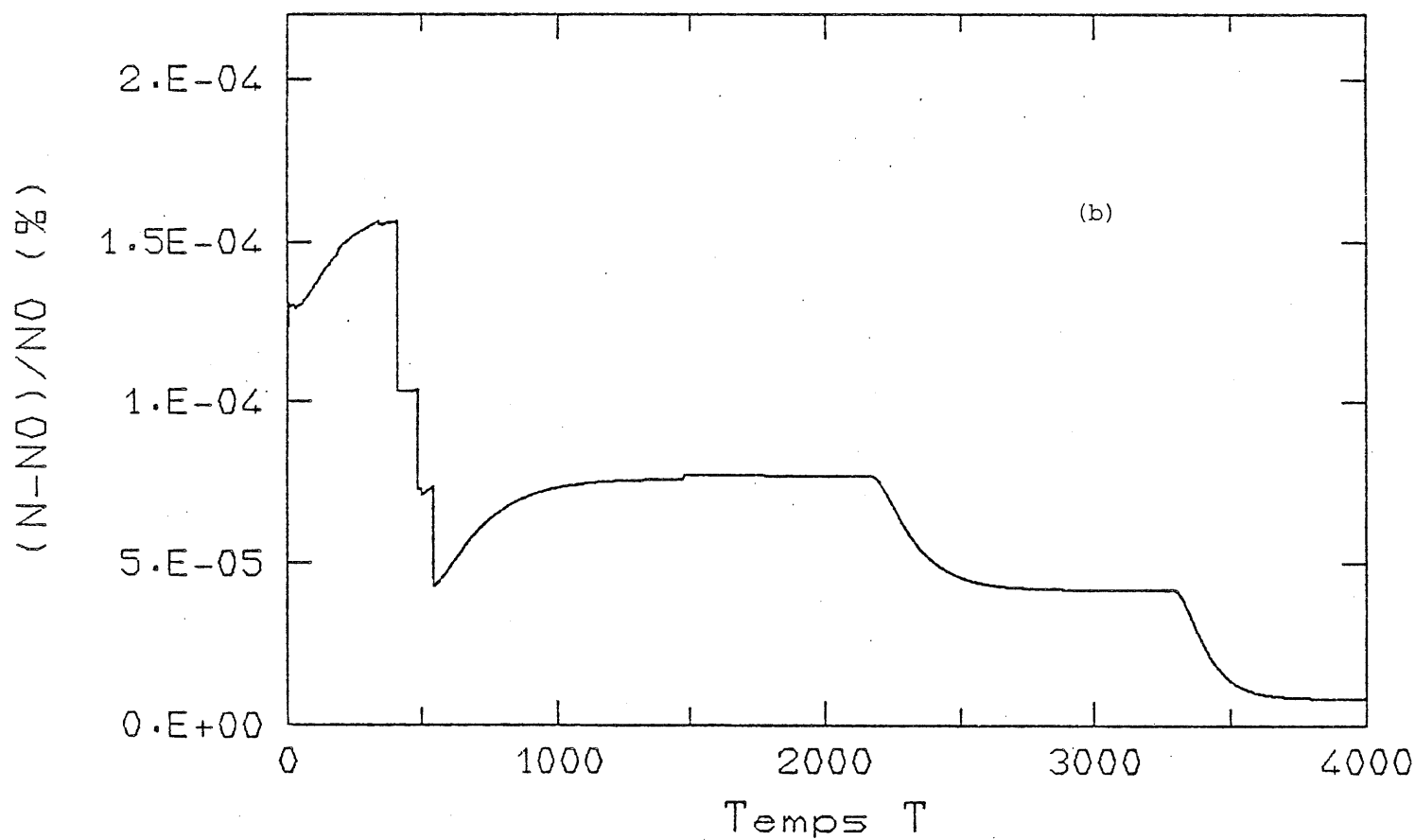
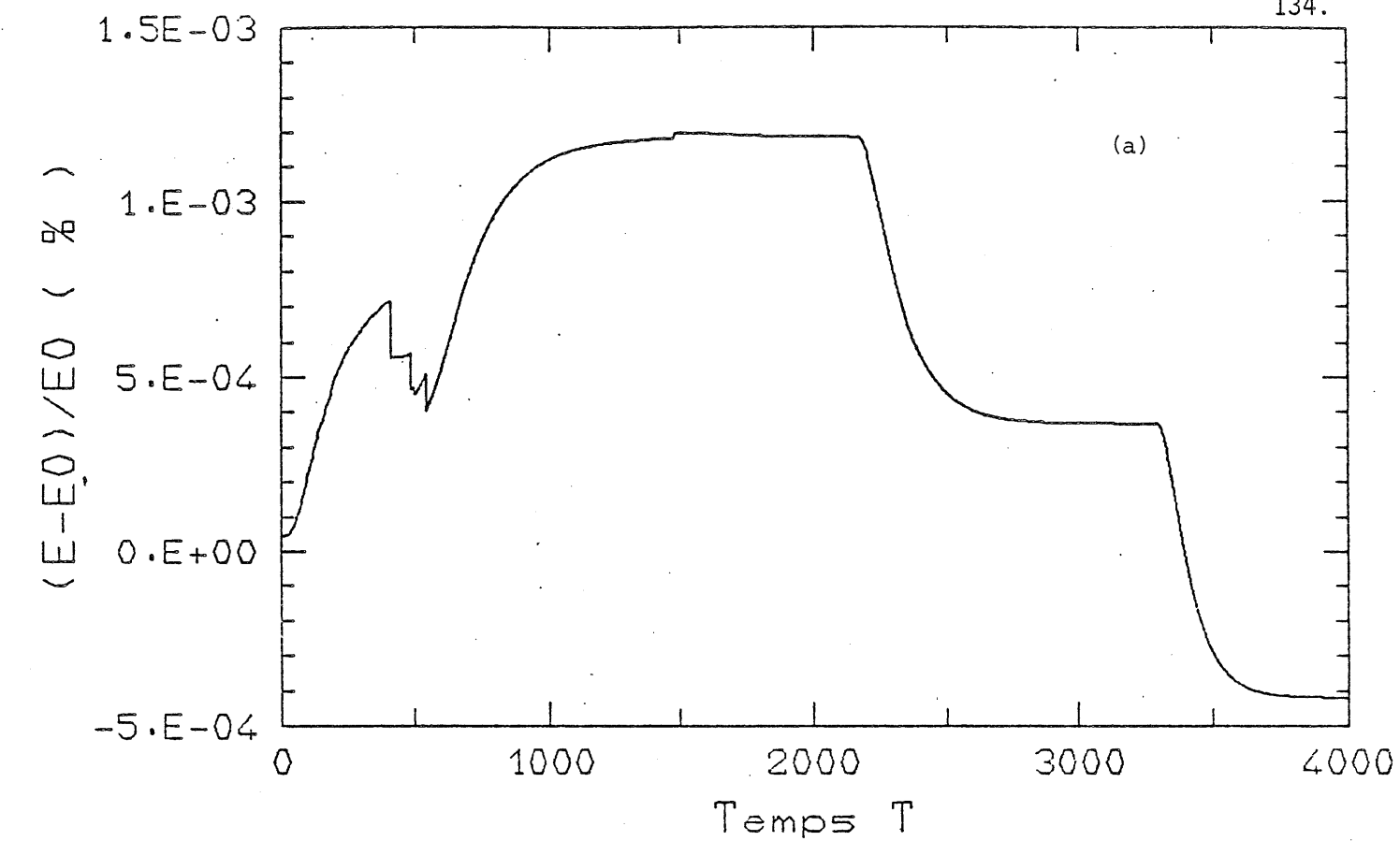


Figure F2 - Erreur relative

- (a) sur la densité d'énergie
- (b) sur la densité de particules.

Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE SCIENCES

Ne figurent pas dans la liste les Professeurs de Médecine-Pharmacie

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

ARNAUD PAUL	Chimie organique
ARVIEU ROBERT	Physique Nucléaire I.S.N
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S.
AYANT Yves	Physique Approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique Expérimentale C.N.R.S.
BARJON Robert	Physique Nucléaire I.S.N
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose-Biologie
BARRA Jean-René	Statistiques-Maths Appliquées
BELORISKY Elie	Physique C.E.N.G. - D.R.F.
BENZAKEN Claude	Mathématiques Pures
BERNARD Alain	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Pures
BILLET Jean	Géographie
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BONNIER Jane Marie	Chimie Générale
BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire I.S.N
BRAVARD YVES	Géographie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAUQUIS Georges	Chimie Organique
CHIBON Pierre	Biologie Animale
COHEN-ADDAD J. Pierre	Physique
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques Pures
CYROT Michel	Physique du Solide
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	zoologie
DELOBEL Claude	M.I.A.G. MATHS APPées

DEPORTES Charles	Chimie Minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-michel	Physique des Plasmas
DOUCE Rolland	Physiologie végétale
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean Marc	Mathématiques Pures
GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
GASTINEL Noël	Analyse Numérique Maths Appliquées
GERBER Robert	Mathématiques Pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Phisiologie Animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jea-René	Mathématiques Pures
KAHANE André détaché	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean louis	Mathématiques Pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques Appliquées
KUPKA Yvon	Mathématiques Pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences Nucléaires I.S.N
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie Végétale
Maynard Roger	Physique du Solide
MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie (Géologie
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	botanique (Biologie végétale)
PAYAN J.Jacques détaché	Mathématiques Pures
PEBAY PEYROULA J.claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique

RENARD Michel
RICHARD Lucien
RINAUDO Marguerite
SENGEL Philippe
SERGERAERT Francis
SOUTIF Michel
VAILLANT François
VALENTIN Jacques
VAN CUTSEN Bernard
VAUQUOIS Bernard
VIALLO Pierre

Thermodynamique
Biologie Végétale
Chimie Cermav
Biologie Animale
Mathématiques Pures
Physique
Zoologie
Physique Nucléaire I.S.N
Mathématiques Appliquées
Mathématiques Appliquées
Géologie

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

ADIBA Michel
ANTOINE Pierre
ARMAND Gilbert
AURIAULT Jean louis
BARET Paul
BEGUIN Claude
BOITET Christian
BORNAREL Jean
BRUN Gilbert
CASTAING BERNARD
CHARDON Michel
CHIARAMELLA Yves
COURT Jean
DEMAILLY Jean Pierre
DENEUVILLE Alain
DEPASSEL Roger
DERRIEN Jacques
DUFRESNOY Alain
GASPARD Francis
GAUTRON René
GIDON Maurice
GIGNOUX Claude
GUITTON Jacques
HACQUES Gérard
HERBIN Jacky
HICTER Pierre

Mathématiques Pures
Géologie
Géographie
Mécanique
Chimie
Chimie Organique
Mathématiques Appliquées
Physique
Biologie
Physique
Géographie
Mathématiques Appliquées
Chimie
MATHEMATIQUES Pures
Physique
Mécanique des fluides
Physique
Mathématiques Pures
Physique
Chimie
Géologie
Sciences Nucléaire
Chimie
Mathématiques Appliquées
Géographie
Chimie

JOSELEAU Jean Paul	biochimie
KERKOVE Claude	Géologie
LEBRETON Alain	Mathématiques Appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences Nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physique
LUNA Domingo	Mathématiques Pures
MANDARON Paul	Biologie
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique CNRS - CRTBT
OUDET Bruno détaché	Mathématiques Appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude	Sciences Nucléaires I.S.N
PFISTER jean-claude détaché	Physique du Solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean Louis	Chimie Organique
RAYNAUD HERVE	Mathématiques Appliquées
RIEDJMANN Christine	Mathématiques Pures
ROBERT Gilles	Mathématiques Pures
ROBERT Jean Bernard	Chimie Physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques Appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie Animale
SOUTIF Jeanne	Physique
School Pierre Claude	Mathématiques Appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	chimie
VALLADE Marcel	Physique
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie

Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'I.U.T.1

PROFESSEURS DE 1ère classe

DODU Jacques

Mécanique Appliquée IUT 1

NEGRE Robert

Génie Civil IUT 1

PROFESSEURS DE 2ème classe

ARMAND YVES

chimie IUT 1

BOUTHINON Michel

EEA. IUT 1

BRUGEL Lucien

Energétique IUT 1

BUISSON Roger

Physique IUT 1

CHECHIKIAN Alain

EEA IUT 1

CHENAVAS Jean

Physique IUT 1

CONTE René

Physique IUT 1

GOSSE JEAN PIERRE

EEA IUT 1

GROS Yves

Physique IUT 1

KUHN Gérard

Physique IUT 1

MARECHAL Jean

Mécanique IUT 1

MICHOULIER Jean

Physique IUT 1

MINIER Colette

Physique IUT 1

MONLLOR Christian

EEA IUT 1

NOUGARET Marcel

automatique IUT 1

PEFFEN René

Métallurgie IUT 1

PERARD Jacques

EEA IUT 1

PERRAUD Robert

Chimie IUT 1

TERRIEZ Jean Michel

Génie Mécanique IUT 1

DERNIERE PAGE D'UNE THESE

3^E CYCLE, DOCTEUR INGÉNIEUR OU UNIVERSITÉ

Vu les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,

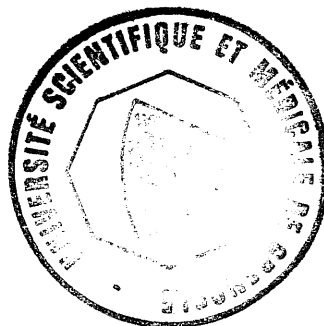
Vu les rapports de M. ...J.N....DOLIQUE.....

M.G.....Pelletier.....

M. ...R.O.U.B.A.U.D.....ROBERT..... est autorisé
à présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEURde.....
...Troisième....Cycle.....

Grenoble, le 04 MAI 1984

Le Président de l'Université Scientifique
et Médicale



M. TANCHE

E. Tanche

R E S U M E

La turbulence de Langmuir Forte dans les plasmas a de nombreuses conséquences tant dans les applications à la fusion rapide qu'à l'astrophysique.

La déduction des équations couplant le spectre turbulent de Langmuir des cavités en effondrement et la fonction de distribution des particules se trouve exposée en détail dans ce mémoire.

Le traitement numérique de ces équations confirme le développement d'une queue de particules suprathermiques prédite théoriquement.

Par ailleurs, l'importance du rôle du rayonnement d'ondes sonores est mise en évidence. Il est montré que ce rayonnement se manifeste par une réaction sur la source de la turbulence, lorsque la queue d'électrons chauds s'est étendue, par l'intermédiaire du phénomène de conversion aléatoire.

La prise en compte de ce dernier phénomène conduit à une sorte d'intermittence, cette tendance a été confirmée numériquement d'abord par une modélisation à 3 et 4 degrés de liberté puis sur l'ensemble des équations spectrales.

M O T S C L E S

Turbulence de Langmuir, queue de particules, ondes sonores, intermittence.